SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Lignes de transmission

Thierry Ditchi

Octobre 2023

TABLE DES MATIERES

I. INTRODUCTION

Les lignes de transmission permettent le transfert des informations. Les distances à parcourir, la bande passante des signaux et la technologie utilisée dépendent du type d'information. Ainsi, Les lignes utilisées pour les liaisons téléphoniques transatlantiques sont des fibres optiques de plusieurs milliers de kilomètres de longueur propageant des ondes électromagnétiques à des fréquences optiques ($>10^{15}$ Hz), alors que celles reliant les composants électroniques dans un circuit intégré sont des pistes de quelques microns de long propageant des ondes électriques et électromagnétiques à des fréquences allant de quelques Hz à quelques GHz. Elles ont toutes pour but de guider l'information sans perturbation, c'est à dire sans trop d'atténuation ou de déformation.

Dans le domaine des télécommunications le problème est évident. Les distances à parcourir sont telles que quelle que soit la fréquence des signaux il faut tenir compte des phénomènes de propagation qui concourent à cette distorsion. En ce qui concerne l'électronique numérique, l'augmentation des performances est très directement liée à la vitesse des circuits. Les ordinateurs personnels fonctionnent aujourd'hui à des fréquences d'horloge supérieure à 3 GHz ! Les signaux logiques sont donc maintenant aussi dans le domaine des hyperfréquences.

La difficulté est l'acheminement des signaux, entre différents points du circuit, entre circuits, entre cartes ou même entre équipements.

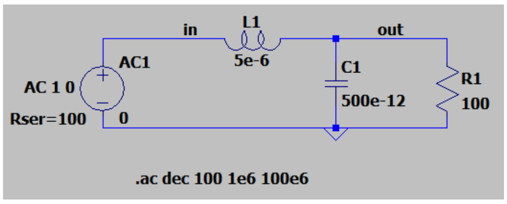
La transmission des informations peut se faire par voie hertzienne (propagation libre) ou par guidage. En ce qui concerne les "guides", il en existe plusieurs types. Les lignes "bifilaires" composée de 2 (ou plus) conducteurs capables de transmettre la tension en même temps que l'onde électromagnétique sont les guides d'ondes les plus fréquemment utilisés. Mais il arrive qu'on doive utiliser des guides ne pouvant propager que la seule onde électromagnétique comme les guides d'onde métalliques ou les fibres optiques.

Dans la suite de ce cours, nous présenterons les différents types de lignes ainsi que leur domaine d'utilisation. Puis dans la suite, nous ne traiterons que les phénomènes de propagation sur les lignes bifilaires sur lesquelles les ondes électriques (V,I) peuvent se propager.

1. En quoi le fait que la tension sur la ligne ne soit pas la même partout change-t-il le problème ?

Admettons que l'on connecte un switch Ethernet à un ordinateur par l'intermédiaire d'un câble de 10m en paire torsadée. Quel niveau de tension a-t-on au niveau du récepteur ?

Le premier raisonnement consiste à remplacer globalement la paire torsadée par des éléments localisés. En négligeant les pertes, la ligne est dans ce cas essentiellement équivalente à une capacité parallèle et une inductance série (de l'ordre de C=50 pF/m et L=500 nH/m) comme on peut le voir sur la figure ci-dessous. Le calcul de la tension mesurée au niveau du récepteur donne 100mV pour une tension de 1V au niveau du générateur ! Cela prouverait qu'il est impossible de relier deux ordinateurs en réseau puisque le signal serait déjà divisé par 10 en 10 m alors que les connexions peuvent atteindre quelques centaines de mètres sur un réseau Ethernet.

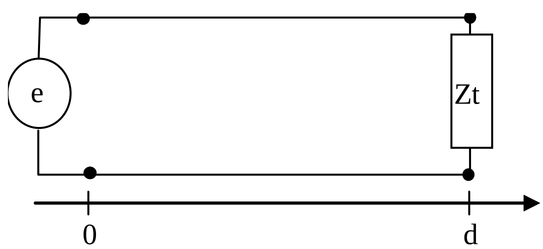


Simulation LT Spice

Ce raisonnement est bien heureusement faux. On ne peut en effet pas remplacer la ligne globalement par une cellule LC puisque la tension n'est pas uniforme tout au long de cette ligne.

En fait, le bon raisonnement consiste à diviser la ligne en éléments suffisamment petits pour que l'on puisse considérer que la tension y est uniforme, puis de remplacer chaque tronçon de ligne par une cellule composée d'éléments localisés (bobines et condensateurs) et qui seraient chacune à une tension différente. C'est ce que l'on va faire dans le chapitre suivant.

2. Quelques rappels sur les ondes



Classiquement, lorsque l'on relie deux points d'un montage par une ligne de transmission, on peut imaginer que la tension soit la même tout au long de la ligne. En fait, toute variation au niveau du générateur ne peut être transmise instantanément à l'autre bout de la ligne. Cela devient sensible si la ligne est longue. Si l'information se propage à la vitesse v_φ, la tension à la distance d à l'instant t est la même que celle qui existait à la sortie du générateur à l'instant $t - \frac{d}{v_\varphi}$.

En régime sinusoïdal par exemple, la tension $v_e(t)$ sur le générateur s'écrit : $v_e(t) = v_0 \sin(\omega t)$

où ω est la pulsation du signal reliée à la fréquence f et à la période T par $\boxed{\omega=2\,\pi\,f}$ et $\boxed{f=1/T}$.

L'onde de tension v(x,t) qui s'éloigne du générateur à la vitesse v_φ en direction de la charge s'écrit :

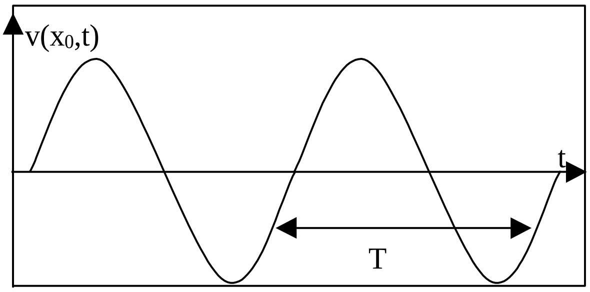
$$v(x,t) = v_0 \sin\left[\omega\left(t - x/v_\varphi\right)\right]$$

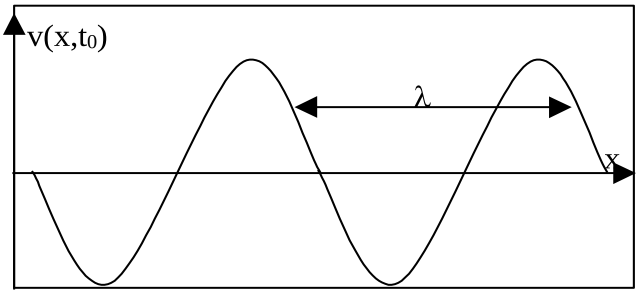
On voit que la tension en une abscisse x quelconque est la même qu'à la sortie du générateur x/v_φ plus tôt.

La tension v(x,t) peut encore s'écrire : $v(x,t) = v_0 \sin\left[\omega t - \frac{\omega}{v_\varphi}x\right]$

et en posant $\beta = \frac{\omega}{v_\varphi}$ la constante de propagation, on a : $v(x,t) = v_0 \sin[\omega t - \beta x]$

v est une fonction de l'espace et du temps. On peut la représenter en fonction de l'un ou de l'autre des deux paramètres x et t en laissant l'autre constant.





La tension à une abscisse particulière x_0 est une sinusoïde de période temporelle T, alors que la tension le long de la ligne à un instant donné t_0 est une sinusoïde de période spatiale λ.

En écrivant par définition de la période spatiale : $v(0,t) = v(\lambda,t)$ on obtient : $\omega t - \beta\lambda + 2\pi = \omega t$ c'est à dire : $\lambda = \frac{v_\varphi}{f}$. On appelle v_φ la vitesse de phase car c'est la vitesse que doit avoir un observateur pour voir la phase $\omega t - \beta x$ constante.

En conclusion il faut noter que la tension à un instant donné n'est pas la même en tout point de la ligne.

3. A partir de quand faut-il tenir compte de ce phénomène ?

On doit tenir compte de ce phénomène dès que la tension est "suffisamment" non uniforme le long d'une ligne. Analysons quelques exemples.

i) Réseau EDF

f=50Hz => λ=c/f= 6000km

Dans ce cas la longueur d'onde est toujours beaucoup plus grande que la longueur des lignes utilisées dans le réseau électrique et on peut considérer que la tension est toujours uniforme. Il est donc inutile d'introduire la notion de propagation sur le réseau EDF.

ii) Télécommunication

réseau informatique Ethernet 100BT : f= qq dizaine de MHz => λ≈ 10 m

La longueur des lignes pour un câblage en paires torsadées disposées en étoile peut varier de quelques mètres à 1000 mètres. Elle n'est donc en général pas négligeable devant la longueur d'onde. Il faut donc que tenir compte de la propagation.

iii) Circuits électroniques

<u>basses fréquences</u> : f= 1MHz => $\lambda \approx 300$m taille des pistes = 10 cm

dans ce cas, les pistes sont toujours beaucoup plus petites que la longueur d'onde. Il est donc inutile de tenir compte des phénomènes de propagation.

<u>Hautes fréquences</u> : f=10GHz => $\lambda \approx 3$ cm taille des pistes sur un circuit imprimé = 1 cm

dans ce cas, la longueur des pistes est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Il est donc indispensable de tenir compte de ces phénomènes de propagation.

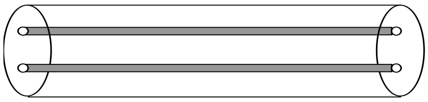
Mais dans le cas d'un circuit intégré, la taille des pistes est plutôt de l'ordre de 1 à 100μm, ce qui peut être négligeable devant λ.

II. Modelisation des lignes

1. Exemples de ligne

A. Lignes bifilaires

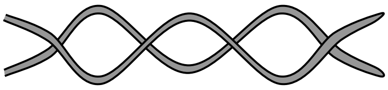
a. Paires droite :



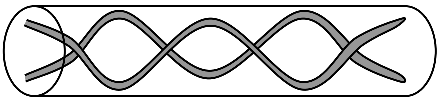
2 conducteurs filaires parallèles et maintenus à distance constante l'un de l'autre par un isolant. Pertes importantes. Grande sensibilité au bruit. Bande passante faible.

b. Paires torsadées :

2 conducteurs filaires isolés torsadés. Là aussi une atténuation importante. Moins sensible au bruit. Très utilisé pour le câblage téléphonique et informatique au niveau local (qq centaines de mètres, km)



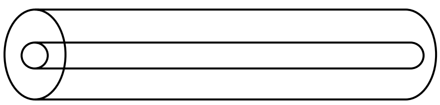
c. Paires torsadées blindées :



C'est le même câble que la paire torsadée mais entourée d'une feuille conductrice. Meilleure immunité au bruit que la paire torsadée simple. Elles sont très utilisées pour le câblage des réseaux à 10 et 1 Gbits.

d. Câble coaxial :

Le conducteur cylindrique extérieur sert de blindage. L'immunité au bruit est donc importante. Les pertes restent grandes et dépendent fortement de la qualité du diélectrique utilisé. La bande passante est importante. Ce type de ligne est utilisé dans le domaine du câblage vidéo, informatique, de l'électronique basse

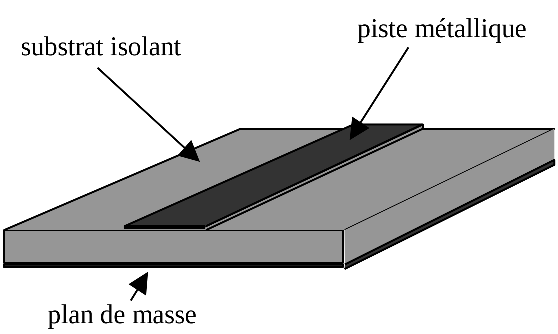


fréquence, mais aussi dans le domaine des hyperfréquences jusqu'à plusieurs dizaines de GigaHertz. Pour éviter une atténuation trop importante en hyperfréquence (par exemple à 40 GHz) on utilise des diélectriques spéciaux très onéreux. (plusieurs centaines d'euros le câble de 50 cm)…

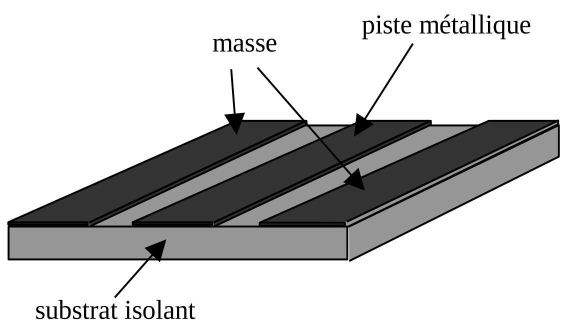
Si la fréquence devient très grande ou si l'application nécessite le transport de très fortes puissances comme pour les radars, on ne peut plus utiliser de ligne bifilaire à cause des pertes trop importantes dans le diélectrique, dont l'usage est obligatoire car il maintient les conducteurs. On utilise alors des guides d'onde métalliques tels que ceux décrit dans la suite.

e. Circuits planaires

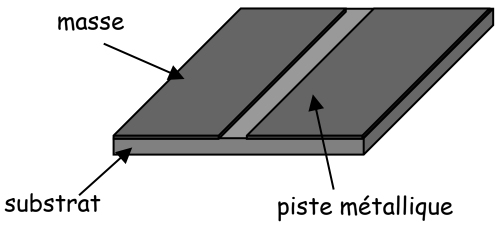
Dans le domaine des hautes fréquences au-delà de quelques 100 MHz, on utilise des lignes spéciales sur les circuits pour reliés les "puces" ou les composants entre eux. Elles sont bons marchés car elles utilisent la technologie des circuits imprimés Les différentes géométries existantes sont présentées dans la suite. Les caractéristiques électriques des lignes dépendent des dimensions des métallisations et des caractéristiques des matériaux utilisés (métaux et diélectriques).



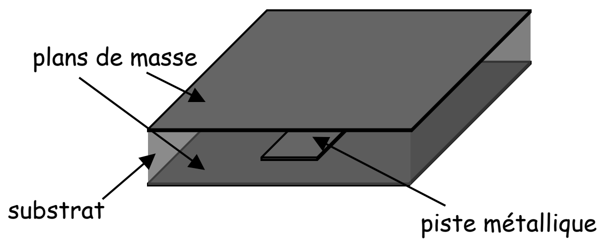
Lignes micro-ruban (micro strip)



Lignes coplanaires (coplanar waveguide)



ligne à fente (slot line)



ligne triplaque

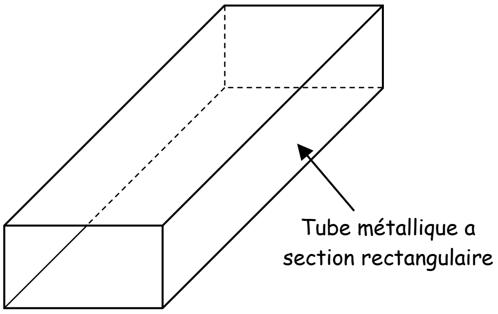
Il existe d'autres types de lignes planaires moins utilisées qui ne sont pas décrites ci-dessus.

B. Guides d'ondes

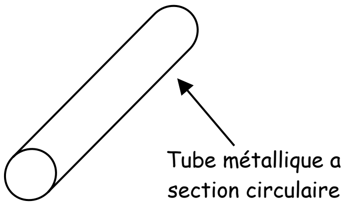
a. Guides d'ondes métalliques

Les guides d'ondes métalliques sont des tuyaux creux en général de section rectangulaire ou circulaire. Ceux-ci ne contiennent le plus souvent que l'air ambiant qui est un diélectrique qui dissipe très peu les ondes électromagnétiques. Cela explique l'intérêt qu'on leur porte dans les applications très hautes fréquences (>50 GHz) ou de fortes puissances (RADAR, Télécommunications par satellite…).

Il n'y a qu'un seul conducteur, et il ne peut donc pas y avoir de tension (ddp entre 2 conducteurs) qui se propage. Ils ne propagent que les ondes électromagnétiques. Ils ont un défaut majeur qui explique qu'on ne les utilise que quand c'est indispensable. La propagation des ondes électromagnétique ne peut s'y faire sans dispersion, c'est à dire sans distorsion des signaux. Cela est dû au mode de propagation qui contrairement aux lignes bifilaires ne peut être un mode TEM (mode de propagation des ondes dans les milieux libres). On peut les utiliser dans tous les domaines de fréquence radioélectriques mais ils sont rarement utilisés à des fréquences inférieures à quelques centaines de MHz car leurs dimensions deviennent alors trop grandes.



Guide d'onde rectangulaire



Guide d'onde circulaire

b. Guides d'ondes diélectriques

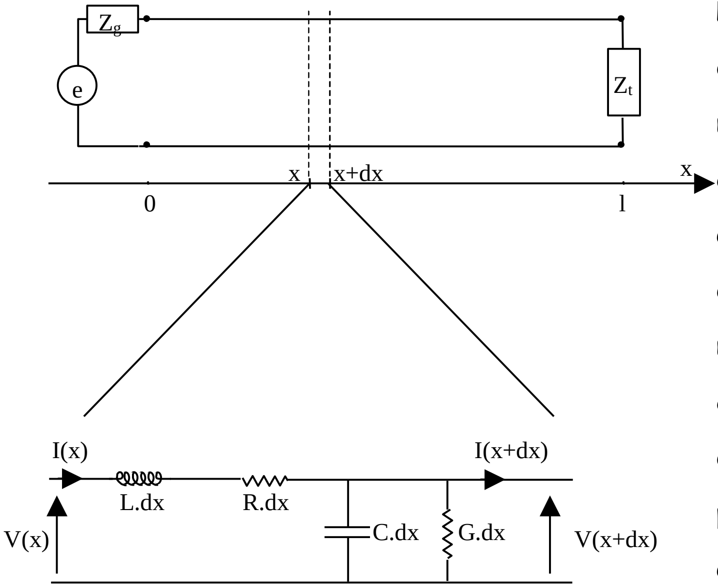
Les guides d'ondes diélectriques sont les fibres optiques. Elles non plus ne peuvent pas propager de tension ou de courant. Elles ne propagent que des ondes électromagnétiques à des fréquences optiques (f > 10^{15} Hz) qui correspondent aux infrarouges ou à la lumière visible. Leur premier avantage réside dans le fait que la lumière s'y propage quasiment sans perte, ce qui autorise des liaisons sans amplification sur des dizaines de kilomètres. Leur second avantage est leur très grande bande passante de plusieurs GHz. Il est par exemple possible de transmettre des milliers de communications téléphoniques simultanées sur une seule fibre. Les liaisons transatlantiques utilisent ces fibres depuis plusieurs décades.

2. Modélisation d'une ligne. Constantes réparties. Équations des lignes

Nous allons dans ce paragraphe, étudié comment la tension peut se propager dans une ligne bifilaire. L'étude des modes de propagation dans les guides d'ondes métalliques et les fibres optiques ne sera pas faite ici.

A. Régime temporel quelconque

Nous avons vu dans le premier chapitre que, quand la longueur d'onde n'est pas grande devant la longueur des lignes, la tension et le courant varient le long de la ligne. On ne peut donc pas modéliser une ligne de transmission par une cellule unique (LC+ pertes) reliant le générateur à la charge. On va donc remplacer chaque élément de longueur dx par une telle cellule. Cette longueur dx doit être petite devant la longueur d'onde pour que l'on puisse y considérer la tension et le courant uniforme.



L en H/m, C en F/m, R en Ω/m, G en Ω^{-1}/m

La ligne ci-contre, de longueur l est donc découpée en tronçons de longueur dx modélisés par des quadripôles constitués de 4 composants. L'inductance L.dx représente les effets magnétiques liés au passage du courant dans les conducteurs, la capacité C.dx modélise le condensateur composé des 2 conducteurs portés à des potentiels différents, la résistance R.dx représente les pertes par effet joule dans les conducteurs et enfin la conductance G.dx les pertes diélectriques. L, C, R, G sont définis par unité de longueur et sont caractéristiques de la ligne.

On a $$V(x,t) = Ldx\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + RdxI(x,t) + V(x+dx,t)$$

d'où : $$-\frac{V(x+dx,t)-V(x,t)}{dx} = L\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + RI(x,t)$$

c'est à dire : $$-\frac{\partial V}{\partial x} = L\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + RI(x,t) \qquad (1)$$

et de même : $$-\frac{\partial I}{\partial x} = C\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + GV(x,t) \qquad \text{(au 1}^{\text{er}}\text{ ordre d'approximation)} \qquad (2)$$

en dérivant la relation (1) par rapport à x on obtient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -L\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t \partial x} - R\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$$

d'où en utilisant la relation (2) :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (RC+LG)\frac{\partial V}{\partial t} + RG\,V$$ (Équation des télégraphistes)

On démontre de la même manière que :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial I}{\partial t} + RG\, I$$ (Équation des télégraphistes)

Il faut remarquer ces équations n'admettent pas de solution sous la forme d'onde à cause des 2 derniers termes. En d'autres termes, les signaux se déforment en se « propageant » dans ces lignes.

a. Cas de la ligne sans perte :

Par contre, dans le cas de ligne sans perte, R=G=0, l'équation des télégraphistes devient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$ (Équation de radioélectriciens)

Cette équation est une équation de propagation dont la solution générale s'écrit :

$$V(x,t) = V^+(x - v_\varphi t, 0) + V^-(x + v_\varphi t, 0)$$

où $v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la vitesse de propagation. V^+ est une onde de tension qui se propage vers les x croissants à la vitesse v_φ. En effet, si on se déplace suivant l'axe des x croissants à la vitesse v_φ, on voit $x - v_\varphi\, t$ constant, et donc $V^+(x - v_\varphi t)$ constant. De même V^- est une onde qui se propage vers les x décroissants à la vitesse v_φ.

La forme de l'onde ne dépend que du générateur. Si le générateur produit une tension sinusoïdale, impulsionnelle ou autre, l'onde aura la même forme.

b. Cas de la ligne réelle

Lorsque les pertes sont faibles, l'équation des télégraphistes admet des pseudo ondes comme solutions générales. Les solutions se déforment au fur et à mesure de leur « propagation ». L'atténuation et la déformation qu'elles subissent dépendent des caractéristiques de la ligne.

B. Régime sinusoïdal

On peut procéder de 2 manières pour traiter ce cas particulier de régime temporel.

i) en utilisant le calcul précédent

La tension aux bornes du générateur $v(t) = v_0\, cos(\omega t + \varphi)$ s'écrit en utilisant les notations complexes : $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$ où V_0 est un nombre complexe qu'on peut écrire $V_0 = v_0\, e^{j\varphi}$

De même, la tension sur la ligne s'écrit $V(x,t) = V(x)e^{j\omega t}$ où *V(x)* est l'amplitude complexe de la tension

Toute dérivée par rapport au temps $\frac{d}{dt}$ se transforme en une multiplication par $j\omega$. L'équation des télégraphistes devient alors :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = [-LC\omega^2 + j\omega(RC + LG) + RG]\, V(x)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = ZY\,V(x) \quad \text{où} \quad Z = R + jL\omega \quad \text{et} \quad Y = G + jC\omega$$

et de la même manière :

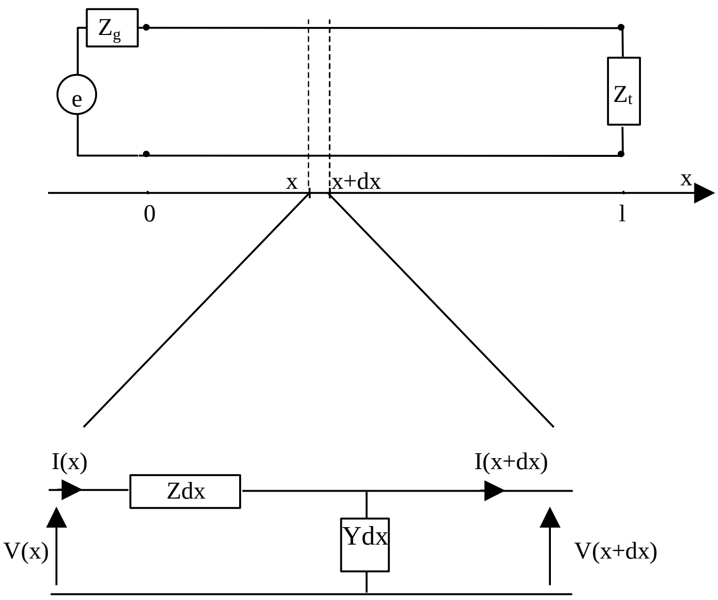
$$\frac{d^2I}{dx^2} = ZY\,I(x)$$

ii) En repartant de zéro

On recommence exactement la même modélisation mais en utilisant les notations complexes puisque l'on est en régime sinusoïdal. L'inductance et la résistance série sont remplacées par l'impédance linéique complexe Z et le condensateur et la conductance parallèle par une admittance linéique Y.

Remarque :

Il faut noter que Les éléments composant Z et Y (L, C, R, G) dépendent en général de la fréquence. Par exemple, les pertes diélectriques (~G) augmentent fortement avec la fréquence. Cela est également vrai pour la résistance des conducteurs (~R) qui croît avec la fréquence à cause de l'effet de peau. Par contre en général les éléments réactifs (L et C) en dépendent peu.



L'application des lois de Kirchhoff nous donnent :

$$V(x) = Zdx\,I(x) + V(x+dx) \text{ce qui donne } \frac{dV}{dx} = -Z\,I(x) \tag{3}$$

et de la même manière :

$$I(x) = Ydx\,V(x) + I(x+dx) \text{ce qui donne } \frac{dI}{dx} = -Y\,V(x) \tag{4}$$

puis en dérivant (3) et en remplaçant $\frac{dI}{dx}$ par (4) on trouve :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = Z\,Y\,V(x) \qquad \text{et de même} \qquad \frac{d^2I}{dx^2} = Z\,Y\,I(x)$$

Ces deux équations appelées équations des lignes, sont équivalentes en régime sinusoïdal à l'équation des télégraphistes.

C. Solutions générales en régime sinusoïdal

a. Cas général de la ligne avec pertes

On pose $\gamma = \sqrt{ZY}$

L'amplitude complexe de la tension et du courant s'écrivent :

$V(x) = V_1\, e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$

$I(x) = I_1 e^{-\gamma x} + I_2 e^{\gamma x}$

où V_1 , V_2 , I_1 et I_2 sont des constantes complexes qui dépendent des conditions aux limites c'est à dire du générateur et de la charge. Les constantes I_1 et I_2 *sont reliées aux constantes* V_1 *et* V_2 *car* le courant et la tension ne sont pas indépendants. Ils sont liés par les équations (3) et (4). En injectant l'expression de $V(x)$ dans l'équation (3) par exemple on trouve des relations entre les constantes V_1 , V_2 , I_1 et I_2.

On trouve finalement les expressions suivantes que nous utiliserons partout dans la suite de ce cours :

$$\boxed{V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2\, e^{\gamma x} \quad \text{et} \quad I(x) = \frac{1}{Z_0}[V_1 e^{-\gamma x} - V_2\, e^{\gamma x}] \quad \text{où} \quad \gamma = \sqrt{ZY} \;\; \text{et} \;\; Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}}$$

b. Interprétation physique

γ est complexe. On l'écrit sous la forme : $\gamma = \alpha + j\beta$ où α et β sont Réels. On a donc en réintroduisant le temps :

$V(x,t) = V_1 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + V_2 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)}$ puis comme $v(x,t) = Reel(V(x,t))$ et $V_1 = v_1 e^{j\varphi_1}$ et $V_2 = v_2 e^{j\varphi_2}$:

$\mathrm{v}(x,t) = v_1\, e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) + v_2\, e^{\alpha x}\cos(\omega t + \beta x + \varphi_2)$ où v_1 et v_2 sont 2 constantes réelles.

Et de la même manière on a :

$i(x,t) = i_1 e^{-\alpha x}\cos(\omega\, t - \beta x + \varphi'_1) - i_2 e^{\alpha x}\cos(\omega\, t + \beta x + \varphi'_2)$ où i_1 et i_2 sont 2 constantes réelles.

La tension $v(x,t)$ (et le courant $i(x,t)$) est la superposition de deux ondes. La première est une onde qui se propage vers les x croissants alors que la seconde se propage vers les x décroissants, mais toutes deux s'atténuent au cours de leur propagation d'un facteur $e^{\pm\alpha x}$. La première s'éloignant du générateur sera logiquement appelée "**onde incidente**", alors que la seconde revenant vers le générateur sera appelée "**onde réfléchie**".

γest appelée la **constante de propagation complexe**, α est la **constante d'atténuation** et β est la **constante de propagation**.

Ces ondes se propagent avec une vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta}$

Z_0, quant à elle, est appelée **impédance caractéristique** de la ligne. Elle ne dépend que des caractéristiques électriques de la ligne. Elle est complexe dans le cas général d'une ligne avec pertes et varie avec la fréquence.

Remarque :

On peut remarquer que dans le cas où seule l'onde incidente se propage, c'est à dire dans le cas où V_2 est nulle, le rapport tension/courant vaut $\frac{V(x)}{I(x)} = Z_0$. Z_0 est donc l'impédance vue par l'onde incidente.

Si Z_0 est indépendante de la fréquence, le générateur, voit au moment de l'allumage une impédance égale à l'impédance caractéristique puisque seule l'onde incidente se propage sur la ligne, l'onde n'ayant pu atteindre la charge pour s'y réfléchir.

c. Cas particulier de la ligne sans perte

Dans le cas d'une ligne sans perte, R=G=0. On a alors :

$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{jL\omega jC\omega} = j\omega\sqrt{LC}$ *(on ne garde que la solution positive de la racine car l'autre signe est déjà prévu dans le terme d'onde réfléchie)*

donc la constante d'atténuation α est nulle : $\alpha = 0$ et la constante de propagation $\beta = \omega\sqrt{LC}$

La tension (ou le courant) reste dans ce cas la superposition de deux ondes se propageant en sens inverse mais sans atténuation.

La relation de dispersion devient alors : $v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ La vitesse de phase est dans ce cas indépendante de la fréquence (si L et C n'en dépendent pas). Les ondes se propagent alors sans distorsion.

De plus l'impédance caractéristique devient purement réelle : $Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$

d. Cas de la ligne avec faibles pertes

Dans le cas de la ligne possédant de faibles pertes, on a : $R << L\omega \; et \; G << C\omega$

d'où $\gamma^2 = ZY = RG - LC\omega^2 + j\omega\,[RC + LG] \approx -LC\omega^2 + j\omega\,[RC + LG] = -LC\omega^2[1 - j\,[\frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega}]]$

et au 1^er ordre $\gamma \approx j\omega\sqrt{LC}\sqrt{1 - j[\frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega}]} \approx j\omega\sqrt{LC}[1 - \frac{j}{2}[\frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega}]] = \frac{\sqrt{LC}}{2}[\frac{R}{L} + \frac{G}{C}] + j\omega\sqrt{LC}$

d'où $\alpha \approx \frac{\sqrt{LC}}{2}[\frac{R}{L} + \frac{G}{C}]$ et $\beta \approx \omega\sqrt{LC}$

On constate que la constante de propagation est identique à celle calculée dans le cas de la ligne sans perte. Comme dans le cas de la ligne sans perte, la vitesse de phase ne dépend pas de la fréquence :

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e. Cas de la ligne sans distorsion

On a $\gamma^2 = RG - LC\omega^2 + j\omega(RC + LG)$

Supposons que $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = k$ une constante réelle quelconque.

alors $\frac{RG}{LC} = k^2$ cad $RG = k^2 LC$

et $RC = GL = kLC$

d'où $\gamma^2 = k^2LC - LC\omega^2 + 2j\omega kLC$

qui peut encore s'écrire : $\gamma^2 = (k\sqrt{LC})^2 + 2(k\sqrt{LC})(j\omega\sqrt{LC}) + (j\omega\sqrt{LC})^2 = (k\sqrt{LC} + j\omega\sqrt{LC})^2$

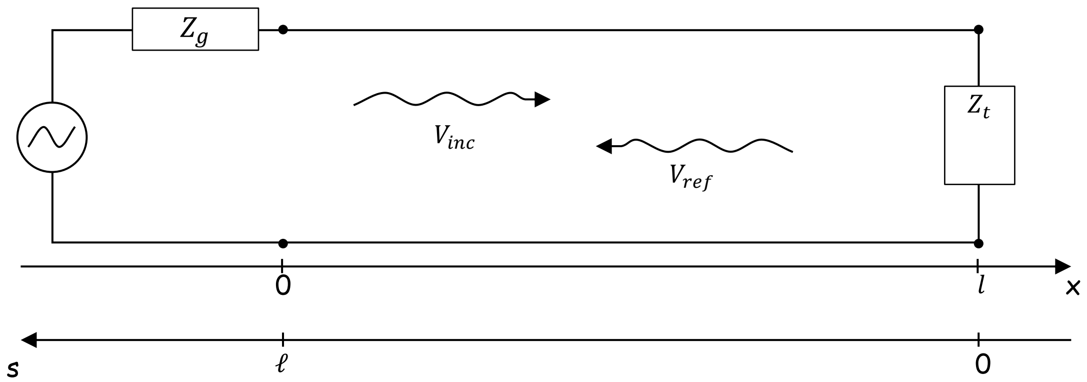
on a donc $\gamma = \pm(k + j\omega)\sqrt{LC}$ (seul le signe + à un sens physique car il correspond à une atténuation)

d'où $\alpha = k\sqrt{LC}$ et $\beta = \omega\sqrt{LC}$ c'est à dire $v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Dans ce cas particulier, malgré les pertes supposées non négligeables, α et v_φ sont indépendantes de la fréquence. La ligne est donc sans distorsion, et il n'y a donc pas de déformation du signal pendant sa propagation, il ne se produit qu'une atténuation.

3. Changement de variable

Il peut être intéressant d'utiliser un autre référentiel que x. Lorsqu'on s'intéresse à ce qu'il se produit lorsque les ondes se réfléchissent sur un obstacle (discontinuité sur la ligne ou charge de bout de ligne) il est judicieux d'utiliser des abscisses s.



L'origine de cette échelle est sur la charge et s croit quand on s'éloigne de la charge.

La relation entre s et x, $x = \ell - s$, permet de passer des expressions de $V(x)$ et $I(x)$ à $V(s)$ et $I(s)$ très simplement.

Alors que dans le repère Ox on avait :

$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{+\gamma x} \text{ et } I(x) = \frac{1}{Z_0}(V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{+\gamma x})$$

dans le repère Os on a :

$V(s) = V_1 e^{-\gamma(\ell-s)} + V_2 e^{+\gamma(\ell-s)}$ et $I(s) = \frac{1}{Z_0}(V_1 e^{-\gamma(\ell-s)} - V_2 e^{+\gamma(\ell-s)})$

cad $V(s) = V_1 e^{-\gamma\ell} e^{\gamma s} + V_2 e^{+\gamma\ell} e^{-\gamma s}$ et $I(s) = \frac{1}{Z_0}(V_1 e^{-\gamma\ell} e^{\gamma s} - V_2 e^{+\gamma\ell} e^{-\gamma s})$

cad $V(s) = V_1' e^{\gamma s} + V_2' e^{-\gamma s}$ et $I(s) = \frac{1}{Z_0}(V_1' e^{\gamma s} - V_2' e^{-\gamma s})$

Comme V_1 et V_2 sont 2 constantes complexes quelconques qu'on ne peut déterminer que quand les conditions initiales sont connues (amplitude de l'onde sortante du générateur et valeur de la charge) V_1' et V_2' sont également deux constantes complexes quelconques.

Pour plus de facilité, que ce soit en coordonnées x ou s, nous noterons dans la suite de ce cours V_1 la constante associée à l'onde incidente et V_2 celle associée à l'onde réfléchie.

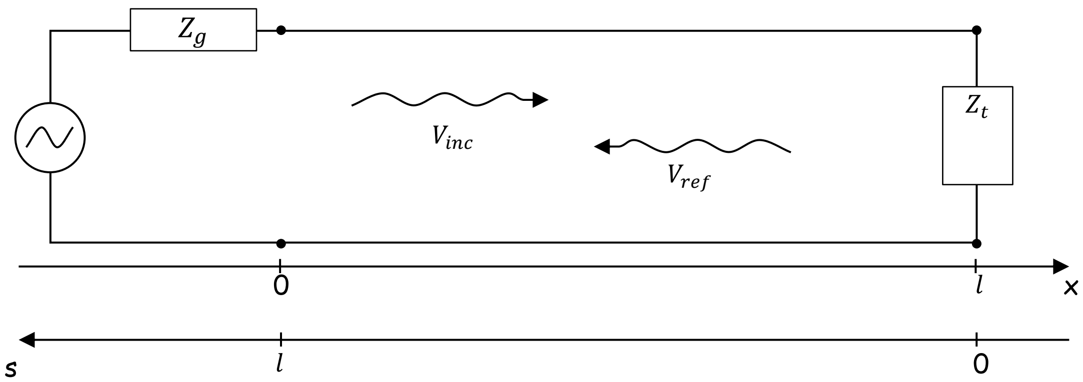
Nous utiliserons dans la suite les expressions suivantes :

$V(s) = V_1 e^{\gamma s} + V_2 e^{-\gamma s}$ et $I(s) = \frac{1}{Z_0}(V_1\, e^{\gamma s} - V_2\, e^{-\gamma s})$ où $\gamma = \sqrt{ZY}$ et $Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$

III. Coefficient de reflexion et Impedance le long d'une ligne

1. Coefficient de réflexion

A. Définition



On rappelle l'expression des ondes de tension et de courant qui se propagent sur la ligne :

$$V(s) = V_1 e^{\gamma s} + V_2 e^{-\gamma s} \quad \text{et} \quad I(s) = \frac{1}{Z_0}(V_1\, e^{\gamma s} - V_2 e^{-\gamma s}) \text{ où } \gamma = \sqrt{ZY} \text{ et } Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

L'existence d'une onde réfléchie sur une ligne peut s'expliquer, soit par la présence sur la ligne d'un élément perturbateur tel que la charge disposée en bout de ligne ou par une discontinuité dans les caractéristiques de la ligne. Par exemple, une onde acoustique se propageant dans l'air se réfléchira sur un obstacle interposé sur sa trajectoire (échos sur les flancs d'une montagne) ou encore une onde lumineuse dans une fibre optique se réfléchira partiellement tout au long de sa propagation (rétro diffusion) à cause des micro- imperfections du milieu de propagation composant la fibre. Dans notre cas, nous supposerons la ligne de transmission parfaite et n'étudierons que les réflexions causées par l'interposition d'une charge à l'extrémité de la ligne.

Afin de quantifier cette réflexion, on peut définir le coefficient de réflexion comme étant l'amplitude complexe de l'onde réfléchie rapportée à celle de l'onde incidente :

$$\Gamma = \frac{V_{refléchie}}{V_{incidente}}$$

que l'on peut écrire :

$$\Gamma(s) = \frac{V_2 e^{-\gamma s}}{V_1\, e^{+\gamma s}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Gamma(s) = \frac{V_2}{V_1} e^{-2\gamma s}$$

Le coefficient de réflexion est un nombre complexe que l'on notera dans la suite : $\Gamma(s) = \rho(s)\, e^{j\theta(s)}$

L'argument de $\Gamma(s)$ noté $\theta(s)$ est le déphasage de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente, tandis que le module $\rho(s)$ représente la fraction de tension réfléchie.

B. En fonction du coefficient de réflexion sur la charge

Le coefficient de réflexion sur la ligne dépend bien sur des caractéristiques de la ligne, mais surtout de la charge placée en bout de ligne. Il est donc intéressant d'exprimer cette grandeur en fonction de sa valeur sur la charge $\Gamma(s=0)$ qu'on notera Γ_t.

En un lieu quelconque de la ligne, $\Gamma(s)=\frac{V_2}{V_1}e^{-2\gamma s}$. En appliquant cette relation en bout de ligne ($s=0$) on trouve $\Gamma_t=\Gamma(s=0)=\frac{V_2}{V_1}$.

On en déduit alors la relation $$\Gamma(s)=\Gamma_t\, e^{-2\gamma s}$$

Remarque :

En variable x la même démonstration donne une expression plus complexe du coefficient de réflexion. $\Gamma(x)=\frac{V_2}{V_1}e^{+2\gamma x}$ *donc* $\Gamma_t=\Gamma(x=\ell)=\frac{V_2}{V_1}e^{-2\gamma\ell}$ *d'où l'on tire le rapport* $\frac{V_2}{V_1}=\Gamma_t\, e^{2\gamma\ell}$.

Et donc $$\Gamma(x)=\Gamma_t\, e^{2\gamma(\ell-x)}$$

Cette relation est moins judicieuse puisqu'elle dépend de la longueur ℓ de la ligne. Or seule la distance s entre la charge et le point d'observation est important. C'est la raison pour laquelle on a préfère utiliser le repère Os plutôt que Ox.

2. Impédance le long de la ligne

A. Définition

En bout de ligne, on sait relier la tension et le courant par l'impédance complexe $Z_t=V_t/I_t$ où V_t et I_t sont respectivement la tension et le courant sur la charge placée en bout de ligne, c'est-à-dire en $s=0$.

De la même façon, on définit naturellement l'impédance en un endroit quelconque de la ligne comme :

$$Z(s)=\frac{V(s)}{I(s)}$$

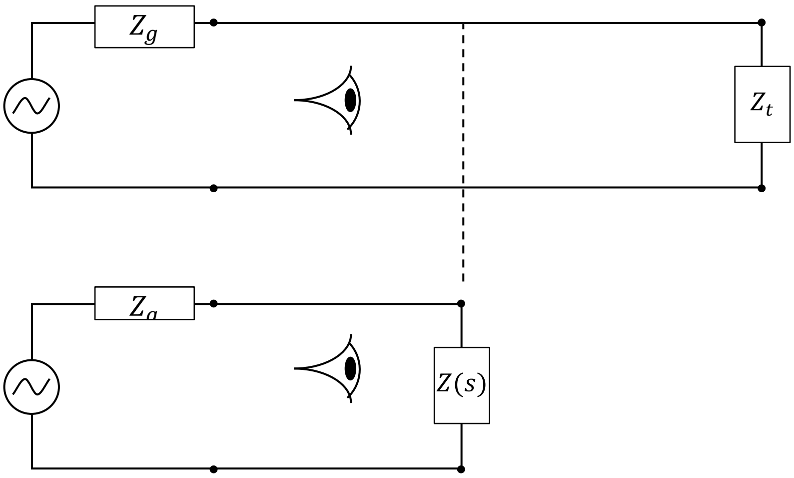
En variable s, Z s'écrit : $$Z(s)=\frac{V_1e^{\gamma s}+V_2e^{-\gamma s}}{\frac{1}{Z_0}(V_1\, e^{\gamma s}-V_2e^{-\gamma s})}=Z_0\frac{V_1e^{\gamma s}+V_2e^{-\gamma s}}{V_1\, e^{\gamma s}-V_2e^{-\gamma s}}$$

On définit l'impédance réduite $z(s)$ de $Z(s)$ comme étant : $z(s)=Z(s)/Z_0$

On a alors : $$z(s)=\frac{V_1e^{\gamma s}+V_2e^{-\gamma s}}{V_1\, e^{\gamma s}-V_2e^{-\gamma s}}$$

B. Interprétation

Du point de vue d'un observateur situé à gauche de l'abscisse *s*, si on remplace le tronçon de ligne situé à droite d'un plan d'abscisse s terminée par la charge Z_t par l'impédance *Z(s)*, rien ne change. L'impédance *Z(s)* est l'impédance équivalente de tout ce qui se trouve à droite de s. Cela est représenté sur la figure suivante. On dit encore que *Z(s)* est l'impédance ramenée en *s* de Z_t le long de la ligne.



3. Relation entre l'impédance et le coefficient de réflexion

A. Cas général

On a vu que : $z(s) = \frac{V_1 e^{\gamma s} + V_2 e^{-\gamma s}}{V_1\, e^{\gamma s} - V_2 e^{-\gamma s}}$ c'est-à-dire : $z(s) = \frac{1 + \frac{V_2 e^{-\gamma s}}{V_1 e^{\gamma s}}}{1 - \frac{V_2 e^{-\gamma s}}{V_1\, e^{\gamma s}}}$

or $\Gamma(s) = \frac{V_2}{V_1} e^{-2\gamma s}$

d'où la relation entre =$\Gamma(s)$ et $Z(s)$: $z(s) = \frac{1+\Gamma(s)}{1-\Gamma(s)}$

ce qui donne, en inversant la relation, $\Gamma(s) = \frac{z(s)-1}{z(s)+1}$

B. Valeurs particulières de z_t

a. La ligne terminée par un court-circuit

$z_t = 0$ d'où $\Gamma_t = \frac{z_t - 1}{z_t + 1} = -1$ or $\Gamma_t = \frac{V_2}{V_1} e^{-2\gamma s}\Big|_{s=0} = \frac{V_2}{V_1}$ d'où $V_2 = -V_1$

b. La ligne se termine par un circuit ouvert

$z_t = \infty$ d'où $\Gamma_t = \frac{z_t - 1}{z_t + 1} = 1$ or $\Gamma_t = \frac{V_2}{V_1}$ d'où $V_2 = V_1$

L'onde est donc totalement réfléchie par le circuit ouvert sans changer de signe à la réflexion.

c. La ligne se termine par l'impédance caractéristique

$z_t = 1$ d'où $\Gamma_t = \frac{z_t - 1}{z_t + 1} = 0$ or $\Gamma_t = \frac{V_2}{V_1}$ d'où $V_2 = 0$

Il n'y a donc aucune réflexion dans ce cas-là, l'onde est totalement transmise dans la charge.

4. Le coefficient de réflexion le long de la ligne

On a $\Gamma(s) = \Gamma_t e^{-2\gamma s}$ où Γ_t est un nombre complexe que l'on écrit $\Gamma_t = \rho_t e^{j\theta_t}$

ce qui donne $\Gamma(s) = \rho_t e^{-2\alpha s} e^{j(\theta_t - 2\beta s)}$ et quand la ligne est sans perte ($\alpha = 0$) $\Gamma(s) = \rho_t e^{j(\theta_t - 2\beta s)}$

A. Module et argument de Γ sur une ligne sans perte

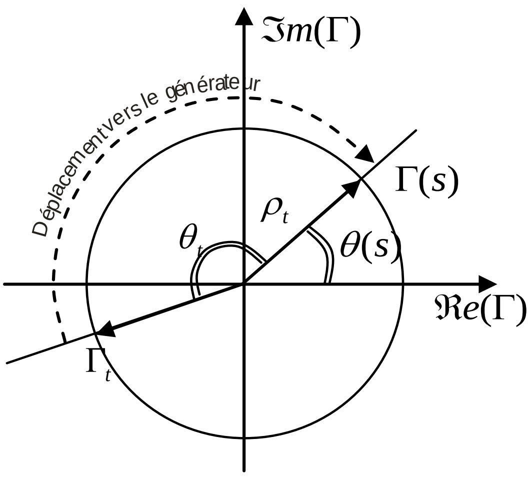
On constate que $\rho(s)$ le module de $\Gamma(s)$ est indépendant de l'abscisse sur une ligne sans perte, tandis que l'argument $\theta(s)$ est une fonction affine de s :

$\rho(s) = \rho_t \neq fct(s)$ et $\theta(s) = \theta_t - 2\beta\, s$

La **période** de l'argument de $\Gamma(s)$ est telle que $2\beta\, s$ varie de 2π soit : $\lambda/2$

B. Représentation de Γ dans le plan complexe

Lorsqu'on se déplace sur la ligne, le module de Γ restant constant, le lieu de Γ est un cercle centré sur l'origine. Quand le déplacement se fait en se rapprochant du générateur c'est-à-dire quand s augmente, l'argument $\theta(s)$ diminue. Nous utiliserons cette propriété plus tard ans le chapitre sur l'abaque de Smith. La figure suivante montre la position de $\Gamma(s)$ en fonction de s dans le plan complexe.



IV. Variation du module de la tension le long de la ligne

1. Cas général

Calculons maintenant l'amplitude de la tension en chaque point de la ligne.

$|V(s)|^2 = V\,V^*$ or $V(s) = V_1 e^{\gamma s} + V_2 e^{-\gamma s} = V_1 e^{\gamma s}(1 + \Gamma(s))$ d'où

$|V(s)|^2 = \left[V_1 e^{\gamma s}\left(1 + \Gamma(s)\right)\right] \left[\rightleftarrows V_1 e^{\gamma s}\left(1 + \Gamma(s)\right)\right]^* = V_1\, V_1^* e^{2\alpha s}(1 + \Gamma)\,(1 + \Gamma^*) = |V_1|^2 e^{2\alpha s}(1 + \Gamma + \Gamma^* + |\Gamma|^2)$

or $\Gamma = \rho_t e^{-2\alpha s} e^{j(\theta_t - 2\beta s)} = \rho_t e^{-2\alpha s}[\cos(\theta_t - 2\beta s) + j\sin(\theta_t - 2\beta s)]$ et $\Gamma + \Gamma^* = 2\,\Re e(\Gamma)$

d'où $|V(s)|^2 = |V_1|^2\, e^{2\alpha s}\, [1 + 2\,\rho_t e^{-2\alpha s}\cos(\theta_t - 2\beta s) + {\rho_t}^2\, e^{-4\alpha s}]$

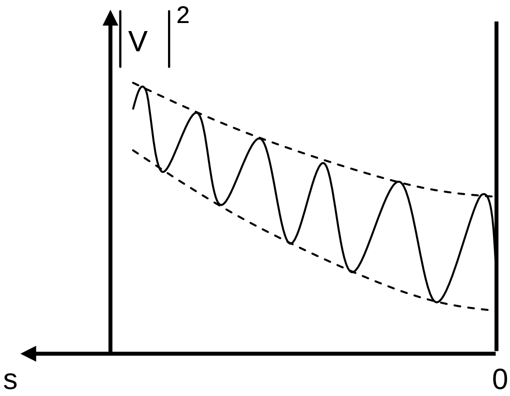
La fonction est une fonction pseudo-sinusoïdale.

Le terme en $cos()$ varie de -1 à +1.

Si l'on suppose que le module du coefficient de réflexion est inférieur à 1 (circuits passifs), $|V(s)|$ est donc compris entre :

$|V_1|\, e^{\alpha s}\ |1 - \rho_t e^{-2\alpha s}|$ et $|V_1|\, e^{\alpha s}\ [1 + \rho_t e^{-2\alpha s}]$

Ce qui donne la représentation de $|V(s)|^2$ci-contre.



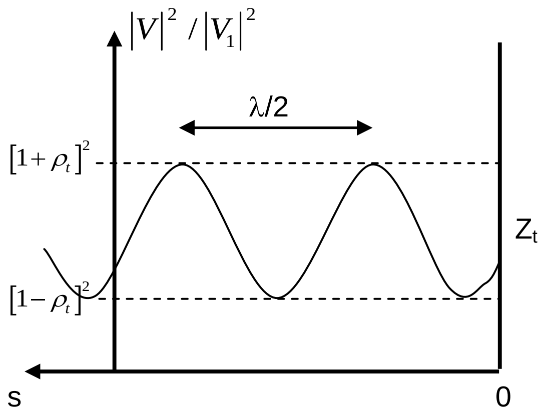
On remarque une succession de minimums et de maximums locaux, appelés respectivement nœuds et ventres. Ceci s'explique par la superposition des 2 ondes incidente et réfléchie. On est en présence d'une onde dite stationnaire, parce ces nœuds et ces ventres sont immobiles. Mais analysons plus précisément dans ce qui suit ce phénomène dans le cas d'une ligne sans perte.

2. Cas d'une ligne sans perte

Dans le cas d'une ligne sans perte, la constante d'atténuation α est nulle. L'amplitude de la tension devient :

$|V(s)|^2 = |V_1|^2\ [1 + 2\,\rho_t\cos(\theta_t - 2\beta s) + {\rho_t}^2]$. $|V(s)|^2$ est donc compris entre $|V_1|^2\,[1 - \rho_t\,]^2$ et $|V_1|^2\,[1 + \rho_t]^2$

On remarque un régime d'onde stationnaire avec une succession de minima (nœuds) et de maxima (ventres) d'oscillation.

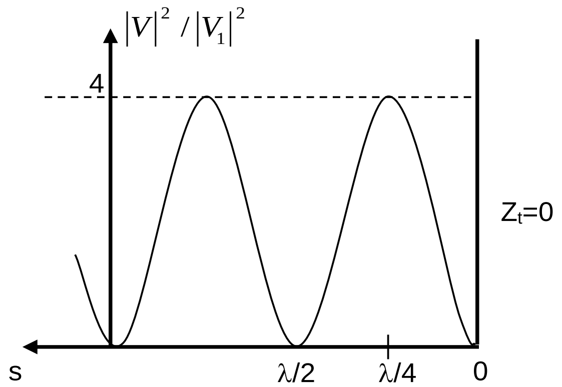


Ceci s'explique par un phénomène d'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. $|V(s)|$ est périodique de **période** $\lambda/2$. On peut remarquer que la période de $|V(s)|$ est identique à celle de $\Gamma(s)$.

A. Ligne terminée par un court-circuit.

$z_t = 0$ or $\Gamma_t = \frac{z_t - 1}{z_t + 1}$ d'où $\Gamma_t = -1$ c'est-à-dire que $\rho_t = 1$ et $\theta_t = \pi$.

donc $|V(s)|^2 = 2\,|V_1|^2[1 + \cos(\pi - 2\beta s)] = 2\,|V_1|^2\,[1 - \cos(2\beta s)] = 4\,|V_1|^2\,\sin^2(\beta s)$



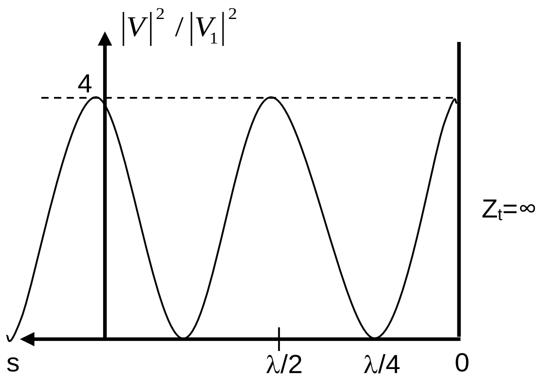
Les extrémums sont plus marqués, les nœuds sont nuls. La tension est maintenue à zéro non seulement sur le court-circuit en bout de ligne mais aussi à chaque nœud tous les λ/2 . Ces points sont des points équivalents au court-circuit du bout de ligne.

B. Ligne terminée par un circuit ouvert.

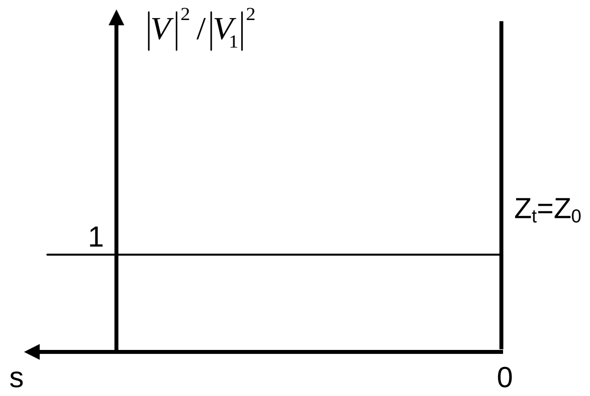
$z_t = \infty$ or $\Gamma_t = \frac{z_t - 1}{z_t + 1}$ d'où $\Gamma_t = 1$ c'est-à-dire que $\rho_t = 1$ et $\theta_t = 0$.

donc $|V(s)|^2 = 2\,|V_1|^2\,[1 + \cos(-2\beta s)] = 2\,|V_1|^2\,[1 + \cos(2\beta s)] = 4\,|V_1|^2\cos^2(\beta s)$

Les conclusions sont identiques au cas précédent. Les extrémums sont plus marqués, les nœuds sont nuls. La tension est maximum non seulement sur le circuit ouvert en bout de ligne mais aussi à chaque nœud tous les λ/2.



C. Ligne terminée par l'impédance caractéristique.



$z_t = 1$ or $\Gamma_t = \frac{z_t - 1}{z_t + 1}$ d'où $\Gamma_t = 0$

c'est-à-dire que $\rho_t = 0$ et donc $|V(s)|^2 = |V_1|^2$

Dans ce cas, l'amplitude de la tension est constante. En effet, seule l'onde incidente se propage et il ne peut donc pas y avoir d'interférence et donc pas d'onde stationnaire.

3. Taux d'Onde Stationnaire

Nous avons vu que selon la valeur de la charge Z_t, la ligne est parcourue par une onde incidente et une onde réfléchie ce qui se traduit par un régime d'onde stationnaire (avec la présence de maxima et de minima d'amplitude de tension). Quand l'onde incidente n'est pas réfléchie par la charge, il n'y a pas superposition des 2 ondes, on a alors une simple onde progressive sur la ligne et la tension ne possède pas d'extremum. Nous allons définir un coefficient qui devra traduire cet état de fait.

On définit le taux d'onde stationnaire (TOS) : $S = \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}}$

encore appelé Rapport d'Onde Stationnaire (ROS) et Voltage Standing Wave Ratio (VSWR) en anglais.

On a vu à la page 25 que $|V(s)|^2$ est donc compris entre $|V_1|^2\,[1-\rho_t]^2$ et $|V_1|^2\,[1+\rho_t]^2$ dans le cas des lignes sans perte, le TOS est donc égal à $S = \dfrac{1+\rho_t}{1-\rho_t}$

S définit la "stationnarité" de l'onde.

- *$1 \leq S \leq \infty$*

- *Si S est grand, l'onde est très stationnaire puisque la différence est grande entre l'amplitude max (ventre) et l'amplitude min (nœud) de la tension.*

- *Au contraire, quand S est faible, les ventre et nœuds d'oscillation sont peu différents.*

- *S=1 correspond à une onde "pas stationnaire" du tout ($|V_{max}| = |V_{min}|$) cad à une onde progressive, sans d'onde réfléchie*

4. Return Loss

On définit le "Return Loss" comme suit :

$$RL = 20\log_{10}(\,\rho) \text{ il s'exprime en dB}$$

Il traduit lui aussi la présence ou non d'une onde réfléchie.

Il vaut -∞ dans le cas où il n'y a pas d'onde réfléchie et 0 si l'onde incidente est totalement réfléchie.

5. Tableau ρ, S, RL

Coefficient de réflexion $\rho = \left\|\frac{V_{ref}}{V_{inc}}\right\|$	**Taux d'onde stationnaire** $S = \frac{1+\rho}{1-\rho}$	**Return Loss** $RL = \log_{10}(\rho)$
0	1	-∞
0.05	1.10	-26 dB
0.1	1.22	-20 dB
0.2	1.5	-14 dB
1	+∞	0 dB

V. Transformation d'impedances par une ligne

1. Étude analytique et interprétation

A. Calcul

On a vu que la tension et le courant dépendent de l'abscisse. L'impédance en dépend donc également.

On a vu que :

$z(s) = \frac{1+\Gamma(s)}{1-\Gamma(s)}$ or $\Gamma(s) = \Gamma_t\, e^{-2\gamma s}$ et $\Gamma_t = \frac{z_t-1}{z_t+1}$

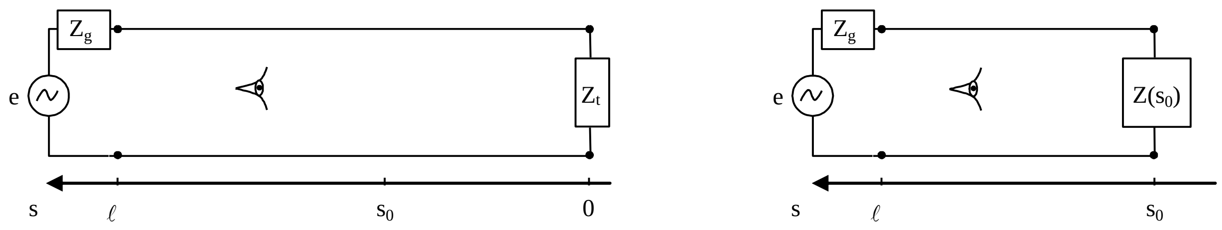
d'où $z(s) = \frac{1+\Gamma_t\, e^{-2\gamma s}}{1-\Gamma_t\, e^{-2\gamma s}} = \frac{1+\frac{z_t-1}{z_t+1}\, e^{-2\gamma s}}{1-\frac{z_t-1}{z_t+1}\, e^{-2\gamma s}} = \frac{z_t\,[1+e^{-2\gamma s}]+1-e^{-2\gamma s}}{z_t\,[1-e^{-2\gamma s}]+1+e^{-2\gamma s}} = \frac{z_t+\frac{1-e^{-2\gamma s}}{1+e^{-2\gamma s}}}{z_t\frac{1-e^{-2\gamma s}}{1+e^{-2\gamma s}}+1}$

or $\mathrm{sh}(a) = \frac{e^a-e^{-a}}{2}$ et $\mathrm{ch}(a) = \frac{e^a+e^{-a}}{2}$ donc $\mathrm{th}(a) = \frac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}} = \frac{1-e^{-2a}}{1+e^{-2a}}$

d'où $z(s) = \frac{z_t+th(\gamma s)}{1+z_t\, th(\gamma s)}$ ou $Z(s) = Z_0\frac{Z_t+Z_0\, th(\gamma s)}{Z_0+Z_t\, th(\gamma s)}$

B. Interprétation

On peut remplacer la fraction de ligne située au-delà de s_0 et la charge Z_t par l'impédance $Z(s_0)$ sans qu'un observateur situé au-delà de s_0 ne s'aperçoive de quoi que ce soit, comme le montre la figure suivante :



On dit aussi que $Z(s_0)$ est l'impédance transformée de Z_t dans le plan $s=s_0$, ou encore que $Z(s_0)$ est **l'impédance ramenée** en $s=s_0$.

C. Cas de la ligne sans perte

Dans le cas d'une ligne sans perte, la constante d'atténuation α est nulle. La constante de propagation γ est alors égale à $\gamma=j\beta$.

Or $j\, tg(\beta s) = \frac{e^{j\beta s}-e^{-j\beta s}}{e^{j\beta s}+e^{-j\beta s}} = j\, tg(\beta s)$ quand $\beta \epsilon \mathbb{R}$

donc

$z(s) = \frac{z_t+j\, tg(\beta s)}{1+j\, z_t\, tg(\beta s)}$ et $Z(s) = Z_0\frac{Z_t+j\, Z_0\, tg(\beta s)}{Z_0+j\, Z_t\, tg(\beta s)}$

tg(x) ayant une périodicité de π, la **période** de *tg(βs)* et donc **de Z(s)** vaut donc **λ/2.**

2. Cas particuliers

A. Ligne terminée par Z_0

Lorsque $Z_t=Z_0$ alors $z_t=1$. Z(s) est alors **toujours** égal à Z_0. $Z(s)=Z_0 \quad \forall s$

C'est le seul cas où, quelle que soit la distance on voit la charge.

B. Ligne terminée par un court-circuit ou stub

On a $z_t = 0$. Donc $Z(s) = j\, Z_0\, tg(\beta s) \in \Im m$

Une ligne court-circuitée est donc équivalente à une impédance purement imaginaire, c'est-à-dire un condensateur aux endroits tel que *tg(βs)* est négative ou à une inductance quand *tg(βs)* est positive.

Remarque : On appelle stub (ou stub fermé) une ligne terminée par un court-circuit placée en parallèle avec la ligne principale.

C. Ligne terminée par un circuit ouvert

On a $z_t = \infty$. Donc $Z(s) = Z_0 \frac{1}{j\, tg(\beta s)} = -j\, Z_0\, cotg(\beta s) \in \Im m$

Une ligne terminée par un circuit ouvert est donc équivalente à une impédance purement imaginaire, c'est-à-dire un condensateur aux endroits tel que $cotg(\beta s)$ est positive ou à une inductance quand $cotg(\beta s)$ est négative.

Remarque : On appelle stub ouvert une ligne terminée par un circuit ouvert placée en parallèle avec la ligne principale.

D. Ligne quart d'onde

C'est une ligne de longueur λ/4. λ dépendant de la fréquence, λ est choisie à une fréquence particulière. Quand cette ligne est chargée par z_t, l'impédance ramenée par la ligne quart d'onde vaut donc :

$$z\left(s = \frac{\lambda}{4}\right) = \lim_{\beta s \to \pi/2} \left(\frac{z_t + j\, tg(\beta s)}{1 + j\, z_t\, tg(\beta s)}\right) = \frac{1}{z_t}$$

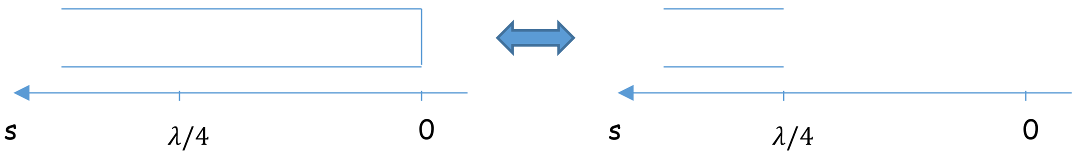
L'impédance réduite est donc inversée par une ligne quart-d'onde $z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{1}{z_t}$

mais l'impédance réelle vaut $Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{Z_0}{z_t} = \frac{{Z_0}^2}{Z_t}$

On remarque qu'ainsi un condensateur se "transforme" en une bobine et inversement qu'une bobine deviendrait un condensateur par une ligne quart d'onde.

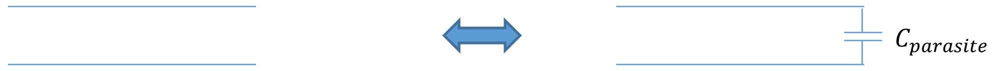
Exemple :

Si on place un court-circuit en bout de ligne, celui-ci se transforme en un circuit ouvert par transformation par la ligne quart d'onde. Car si $z_t = 0$ alors $z(\lambda/4) = \infty$. *Cela permet de réaliser un "vrai" circuit ouvert.*



Bien entendu, ce raisonnement n'est valable qu'à la fréquence pour laquelle la ligne fait $\lambda/4$.

Au contraire, une ligne laissée ouverte n'est pas vraiment équivalente à une ligne chargée par un circuit ouvert à cause des lignes de champ qui relient les 2 extrémités de la lignes que l'on modélise par un condensateur parasite.



VI. ABAQUE DE SMITH

1. Introduction

Z et Γ sont reliés par la relation suivante : $\Gamma(s) = \dfrac{z(s)-1}{z(s)+1}$ (1)

Si on connaît Γ, il est donc possible de calculer z. tous deux sont complexes. Le calcul est donc complexe. L'abaque de Smith, que nous allons présenter dans la suite de ce chapitre, va permettre d'effectuer ce calcul graphiquement.

Il n'est pas bien entendu pas question de prétendre se passer de machine pour calculer cette transformation, mais nous verrons que, plus qu'un outil de calcul, l'abaque de Smith est un outil indispensable, d'abord pour présenter des résultats, mais surtout comme outil graphique de réflexion sur des problèmes complexes.

2. Fabrication de l'Abaque de Smith

On pose z=a+jb et Γ=X+jY .

La relation (1) devient : $\Gamma = \dfrac{a-1+jb}{a+1+jb} = \dfrac{[a-1+jb][a+1-jb]}{[a+1+jb][a+1-jb]} = \dfrac{a^2-1+b^2+j2b}{(a+1)^2+b^2}$

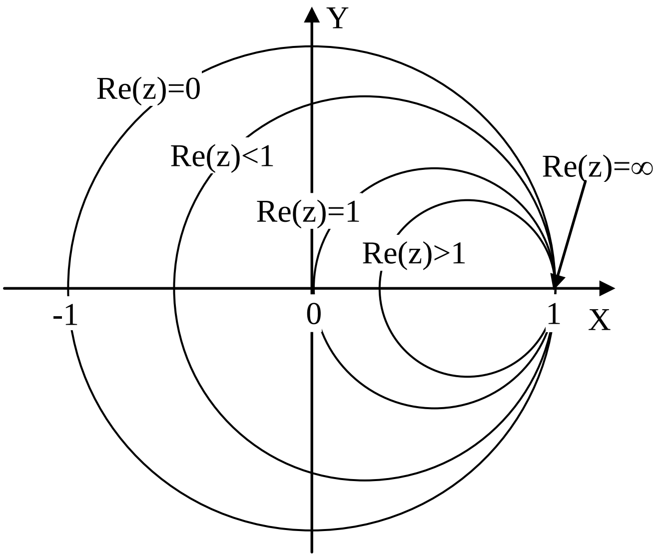
d'où $X = \dfrac{a^2-1+b^2}{(a+1)^2+b^2}$ et $Y = \dfrac{2b}{(a+1)^2+b^2}$

a. Quel est le lieu de Γ lorsque la partie réelle de z est constante et que b varie ?

On montre que : $\left(X - \dfrac{a}{a+1}\right)^2 + Y^2 = \dfrac{1}{(a+1)^2}$ qui est l'équation d'un cercle de rayon R=1/(a+1) et de centre

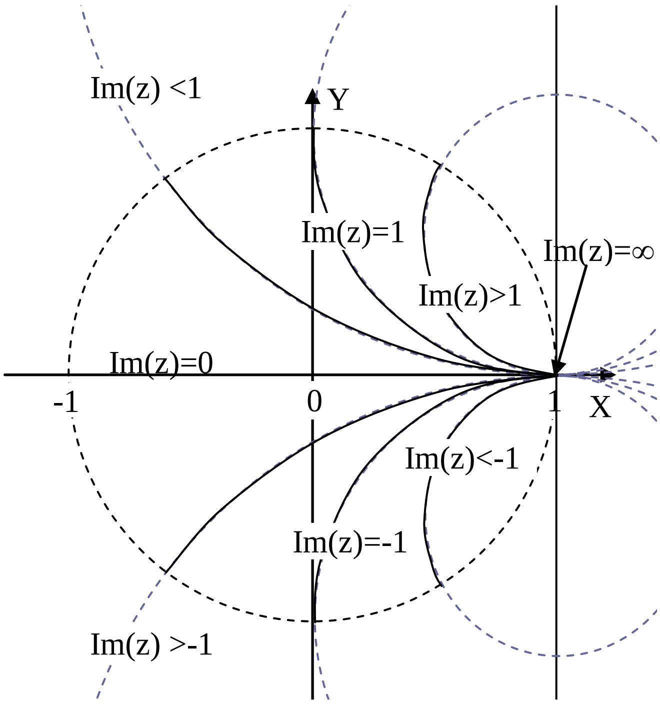
(X_0 , Y_0)= (a/(a+1) , 0).

On est donc en présence d'une famille de cercles dont les centres sont tous alignés sur une droite horizontale passant par Y=0



b. Quel est le lieu de Γ lorsque b la partie imaginaire de z est constante et que a varie ?

On montre que : $(X-1)^2 + \left(Y - \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2}$ qui est l'équation d'un cercle de rayon R=1/b et de centre

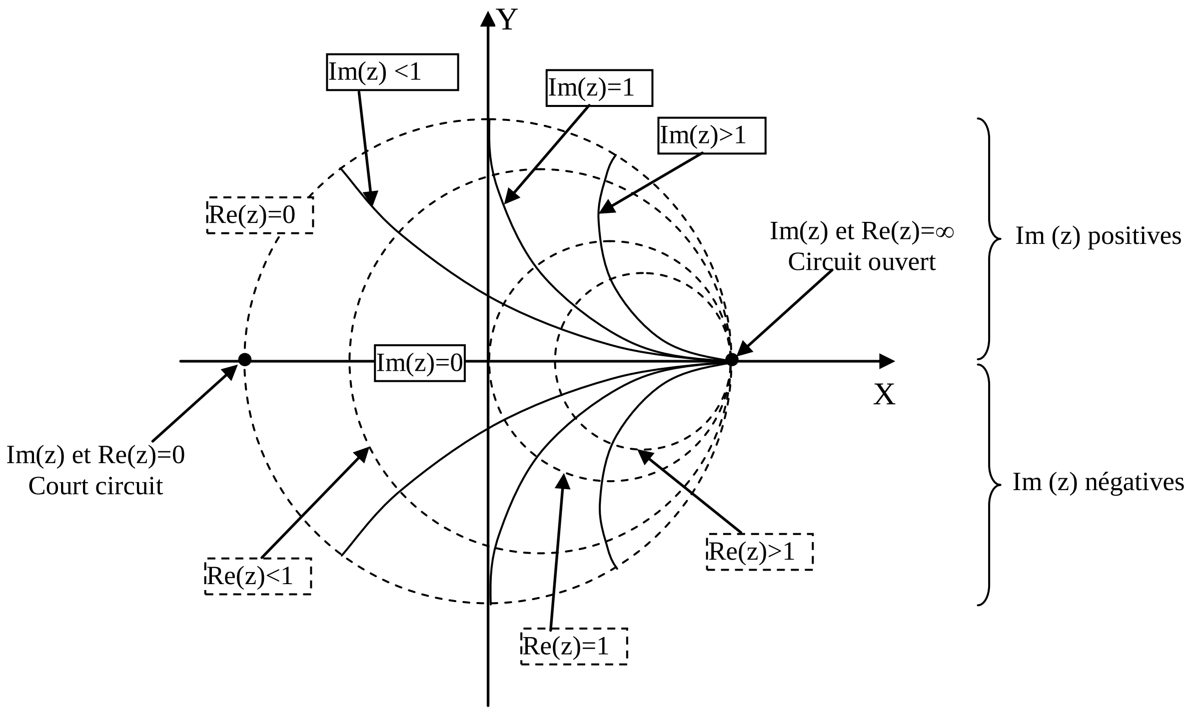


(X_0 , Y_0) = (1,1/b). On est donc en présence d'une famille de cercles dont les centres sont tous alignés sur une droite verticale passant par X=1.

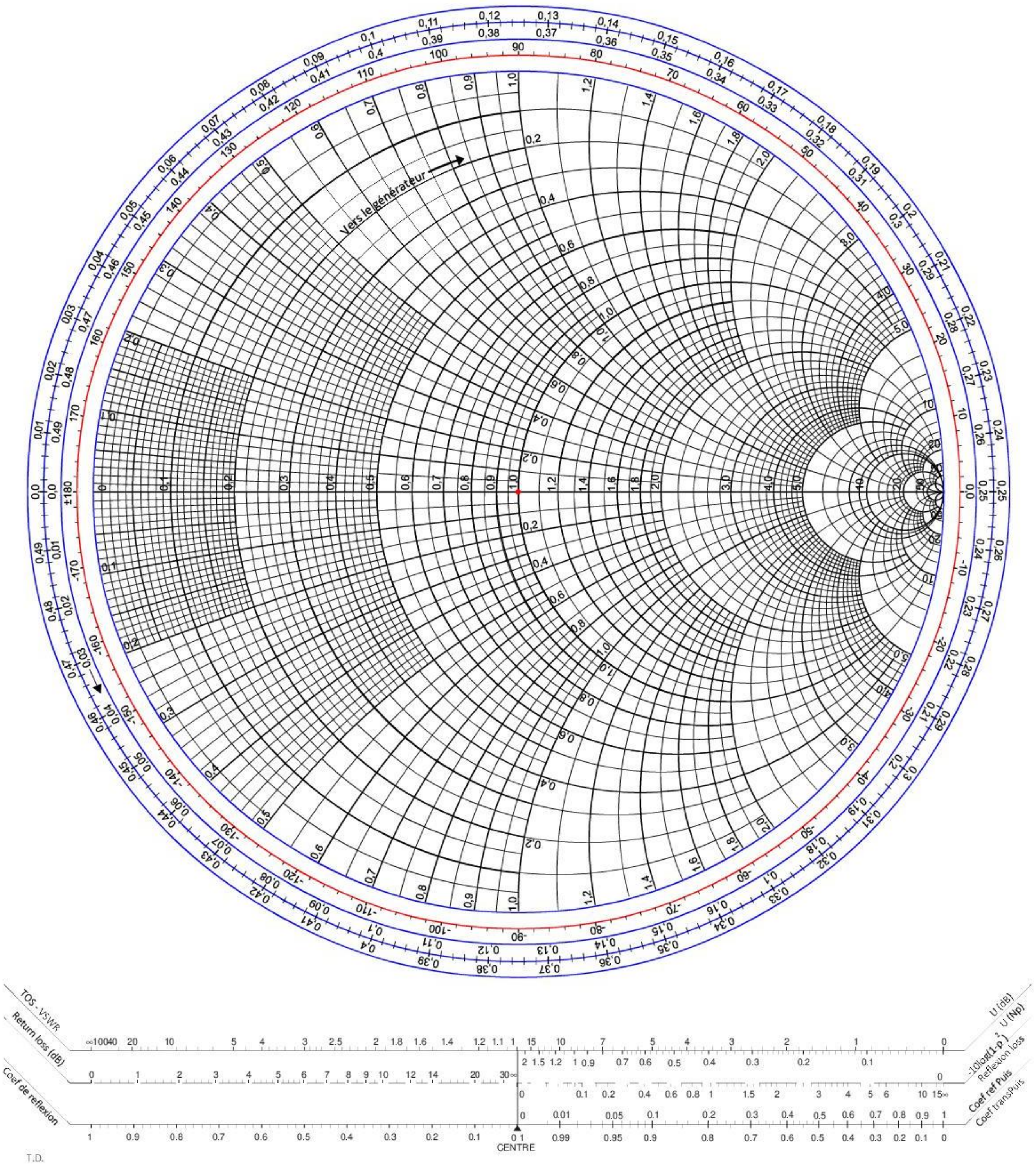
On a limité le tracé des cercles aux parties comprises à l'intérieur du cercle $|\Gamma|<1$ car on se limite aux cas des circuits passifs pour lesquels le module de Γ ne peut être supérieur à 1. Dans le cas des circuits actifs, cette limitation "saute".

3. Abaque de Smith et utilisation pratique

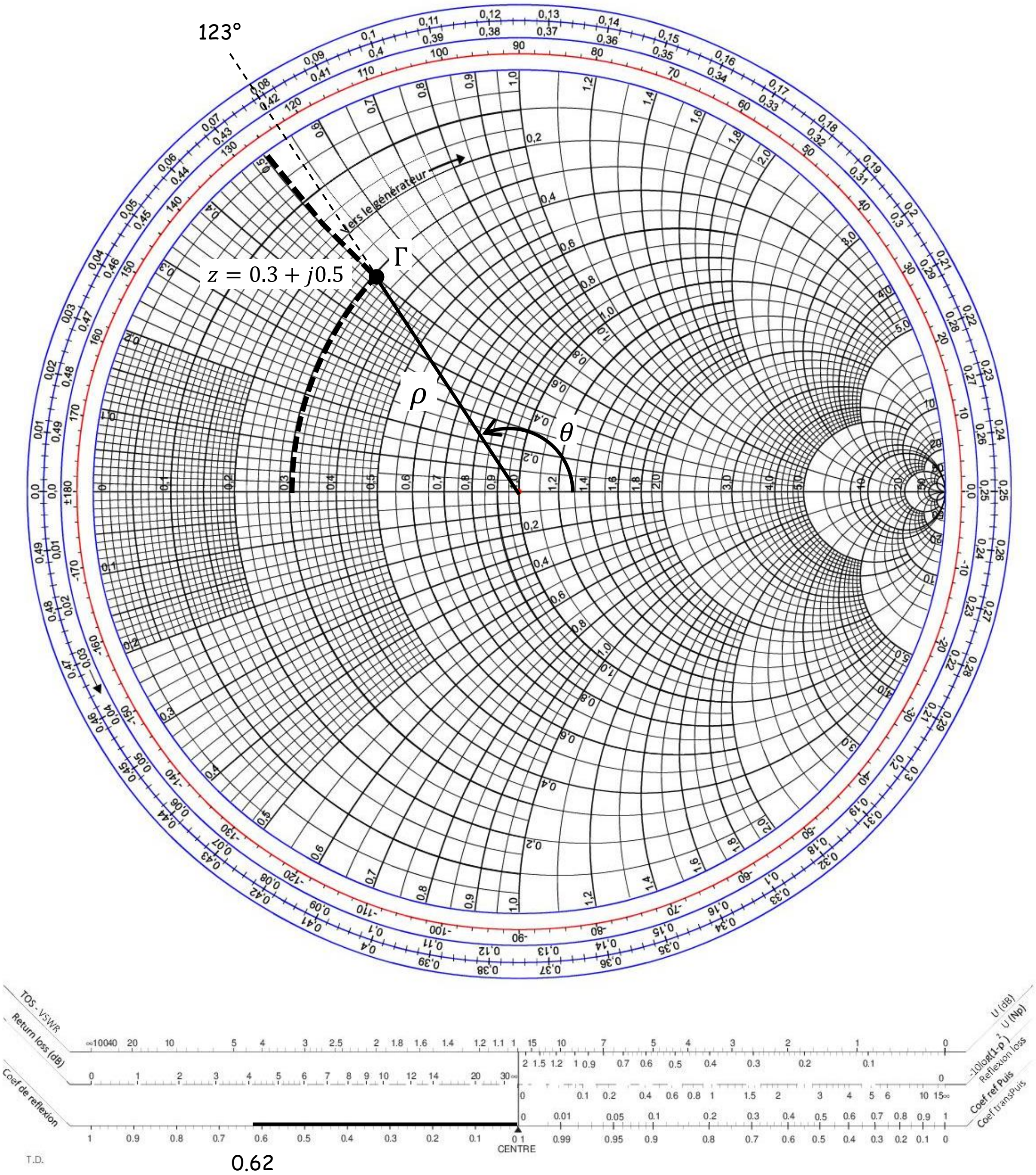
L'abaque de Smith est donc le tracé des cercles Re(z)=cste et des cercles Im(z)=cste sur le plan complexe de Γ , comme le montre la figure suivante.



L'Abaque que nous utiliserons le plus souvent se présente comme la figure suivante. Elle comporte de nombreuses indications supplémentaires que nous commenterons plus tard.


Vers le générateur
TOS - VSWR
Return loss (dB)
Coef de reflexion
CENTRE
U (dB)
U (Np)
Reflexion loss
Coef ref Puis
Coef transPuis
T.D.

On peut placer par exemple z=0.3+j0.5. Pour mesurer $\Gamma=\rho e^{j\theta}$, il suffit de mesurer la longueur du segment ρ sachant le rayon du grand cercle vaut 1 (règle de 3) et de mesurer l'angle θ grâce à l'échelle extérieure (en degrés) ou d'utiliser les autres échelles en faisant une règle de 3. Ici par exemple Γ=0.62 e $^{j\,123°}$



On peut aussi utiliser l'échelle en bas à droite (coef de ref) pour déterminer ρ le module de Γ.

4. Abaque de Smith en admittance

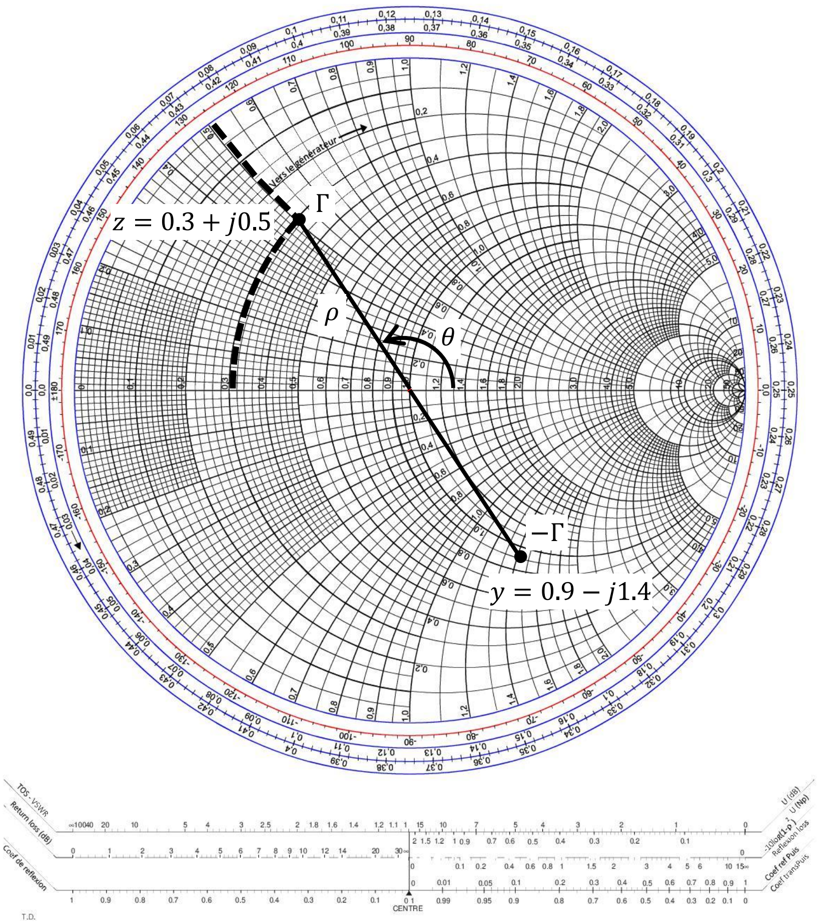
La relation $\Gamma(s) = \frac{z(s)-1}{z(s)+1}$ peut s'écrire $\Gamma(s) = \frac{1-\frac{1}{z(s)}}{1+\frac{1}{z(s)}}$ ce qui considérant l'admittance $y = 1/z$ s'écrit encore : $\Gamma(s) = \frac{1-y(s)}{1+y(s)}$

Ou encore : $-\Gamma(s) = \frac{y(s)-1}{y(s)+1}$

Il y a donc la même relation entre -Γ et y qu'entre Γ et z. L'Abaque de Smith permet donc aussi de calculer y connaissant Γ. Il suffit pour cela de poser Γ, de prendre le symétrique de Γ par rapport au centre de l'Abaque, ce qui donne$-\Gamma$, et enfin de lire y en cet endroit.

Autrement dit on montre que y est le symétrique de z par rapport au centre de l'abaque.

Si on reprend l'exemple précédent, $z = 0.3 + j0.5$ et $\Gamma = 0.62\ e^{\,j\,123°}$, l'admittance réduite $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{0.3+j0.5}$ dont le coefficient de réflexion vaut $-\Gamma = -0.62\ e^{j123°} = 0.62\ e^{j(123°+180°)}$ est situé à l'opposé de z par rapport au centre de l'abaque comme le montre la figure suivante.



5. Impédances ramenées grâce à l'abaque de Smith *(lignes sans perte)*

Connaissant l'impédance en un point de la ligne (par ex en bout de ligne), on cherche à déterminer l'impédance ramenée en un point quelconque de la ligne.

Plutôt que de vouloir calculer cette transformation à l'aide de la formule $z(s) = \frac{z_t + th(\gamma s)}{1 + z_t\, th(\gamma s)}$ (ou $z(s) = \frac{z_t + j\, tg(\beta s)}{1 + j\, z_t\, tg(\beta s)}$ pour une ligne sans perte), ce qui ne pose aucun problème en s'aidant d'un ordinateur ou d'une simple calculette, nous allons voir comment il est possible de calculer ceci à l'aide de l'abaque de Smith.

Plutôt que de transformer l'impédance, il est plus simple de transformer le coefficient de réflexion. En effet, celui-ci s'écrit : $\Gamma(s) = \rho_t e^{-2\alpha s}\, e^{j(\theta_t - 2\beta s)}$ et dans les lignes sans perte $\Gamma(s) = \rho_t\, e^{j(\theta_t - 2\beta s)}$.

On a vu auparavant comment évolue Γ_t dans le plan complexe quand on se déplace sur une ligne. Le module ρ_t est constant et un déplacement vers le générateur entraîne une rotation dans le sens horaire sur un cercle de rayon ρ_t. On a vu de plus que la période de Γ vaut $\lambda/2$. Quand on se déplace de $\lambda/2$ sur la ligne θ_t-2βs varie de 2π. Le point correspondant sur l'abaque fait donc un tour.

Il existe 3 échelles autour de l'abaque ; une échelle en degrés permettant de repérer θ(s) l'argument de Γ(s), et 2 autres échelles graduées de 0 à 0.5 tournant l'une dans le sens horaire et l'autre dans le sens trigonométrique. Nous appellerons ces graduations des graduations d'abaque. Un déplacement de $\lambda/2$ sur la ligne correspond à une rotation de 2π sur l'abaque et donc à une variation de 0.5 graduation d'abaque. Ces graduations d'abaques correspondent donc des déplacements normalisés par la longueur d'onde. Le tableau suivant montre la correspondance.

Déplacement sur la ligne	Variation de l'argument de Γ	Graduations d'abaque
0.5 λ	2π	0.5
s	(4π/λ) s	s/λ

Prenons un exemple pour illustrer cela.

Une charge Z_t = (50-j35) Ω est placée à l'extrémité d'une ligne d'impédance caractéristique Z_0=50 Ω. Calculons la valeur de l'impédance à 2cm de la charge. La longueur d'onde λ sur la ligne à la fréquence de travail vaut 12 cm.

D'abord, pour utiliser l'abaque il faut passer en impédance réduite. $z_t = \frac{Z_t}{Z_0} = 1 - j\,0.7$

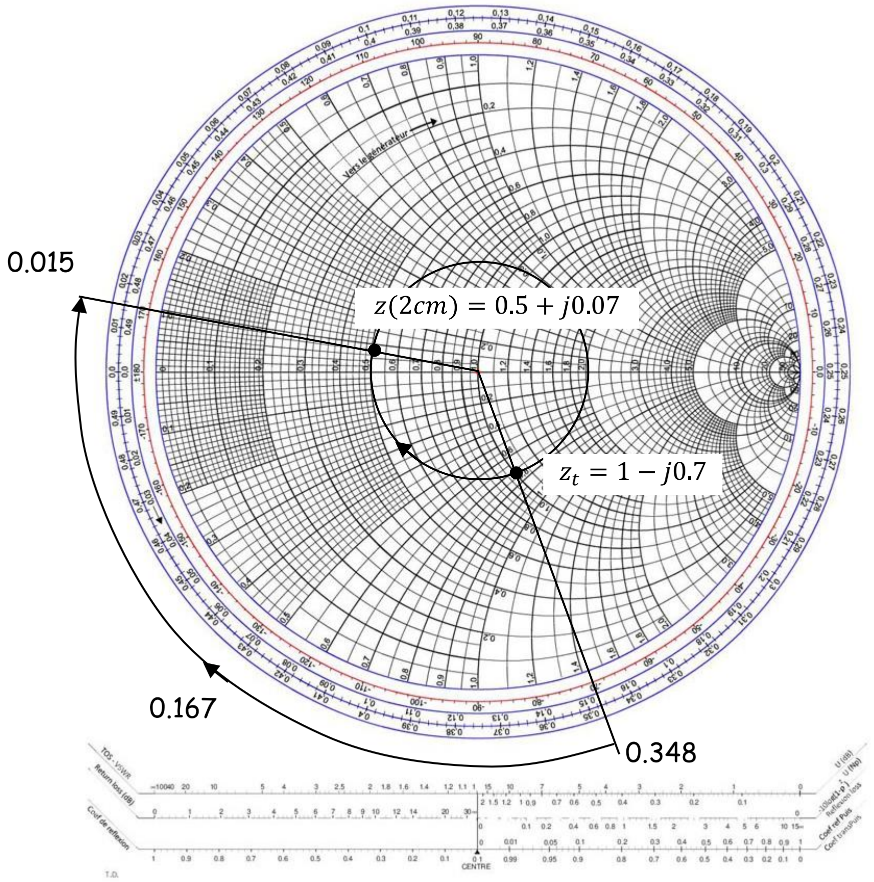
Plaçons l'impédance z_t sur l'abaque.

On trace un cercle (de centre =centre de l'abaque) passant par z_t. Ce cercle représente le lieu des impédances ramenées sur la ligne.

Il faut ensuite effectuer le déplacement sur l'abaque correspondant au déplacement de 2 cm sur la ligne.

2cm → $2/\lambda$ = 2/12=1/6=0.167 graduation d'abaque.

z_t est repéré à la graduation 0.348. Le déplacement de 2 cm correspond à 0.167 graduations d'abaque. On doit tourner de 0.167 dans le sens horaire puisque l'on se rapproche du générateur. On arrive en 0.515 c'est-à-dire en 0.015 puisque les graduations d'abaques sont de modulo 0.5. On place donc le point d'arrivée sur le cercle à la graduation 0.015 .



On lit finalement la valeur de $z(2cm) = 0.5 + j0.07$ et donc $Z(2cm) = (25 + j\,3)\Omega$.

Remarques :

- Il faut faire attention au sens de rotation : rotation horaire si déplacement vers le générateur, rotation trigonométrique si déplacement en s'éloignant du générateur.

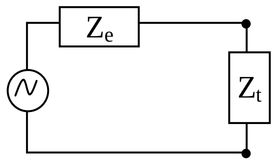
- Si $Z_t=Z_0$ cad $z_t=1$, le point correspondant est au centre de l'abaque et tout déplacement sur la ligne laisse l'impédance au même point

.

VII. Transport de l'energie sur les lignes

1. Rappel sur les puissances et l'emploi des complexes

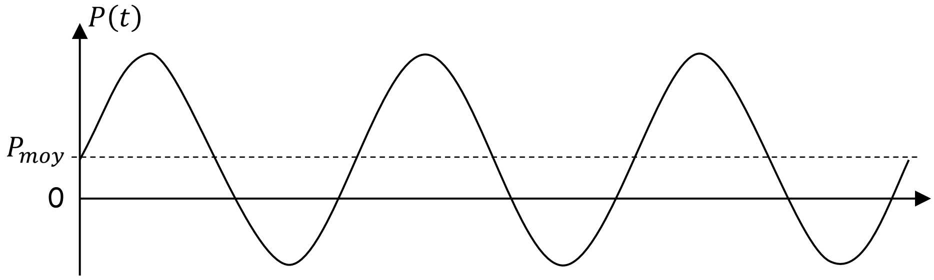
Soit une charge Z_t alimentée par un générateur d'impédance de sortie Z_e de fem e.



On donne $v = V_0 \cos(\omega t)$ et $i = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ où φ est le déphasage entre le courant et la tension et dépend de la valeur et de la nature de la charge Z_t.

Le calcul de la puissance instantanée vers la charge donne : $P(t) = v(t)\, i(t) = V_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$

Et donc : $P(t) = \frac{V_0\, I_0}{2}[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)]$



P(t) est la somme de 2 termes. Le premier terme $P(t) = \frac{V_0\, I_0}{2}\cos(2\omega t + \varphi)$ correspond à une composante alternative qui varie sinusoïdalement avec une amplitude $\frac{V_0\, I_0}{2}$ et de valeur moyenne nulle. Elle est donc alternativement positive et négative et traduit un échange oscillatoire et réversible d'énergie entre la source et la charge. Le second terme ($\frac{V_0\, I_0}{2}\cos(\varphi)$) correspond à la valeur moyenne de la puissance et est toujours positif lorsque la charge Z est passive. Ce terme traduit un échange d'énergie unidirectionnel de la source vers la charge.

La puissance moyenne $\overline{P}$ s'écrit : $\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\, dt = \frac{V_0\, I_0}{2}\cos(\varphi)$ est appelée puissance active. C'est la puissance effectivement transmise à la charge (et dissipée dedans).

Ce calcul de la puissance dissipée nous oblige à passer en notation réelle alors que dans la plupart des cas, en électronique, on reste en notation complexe.

Comment faire le calcul de la puissance dissipée directement en notation complexe ?

Soit $V = V_0 e^{j\omega t}$ et $I = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ les tensions et courants en notation complexe.

Le calcul de V.I ne correspond à rien de physique et certainement pas à la puissance instantanée ni à la puissance moyenne.

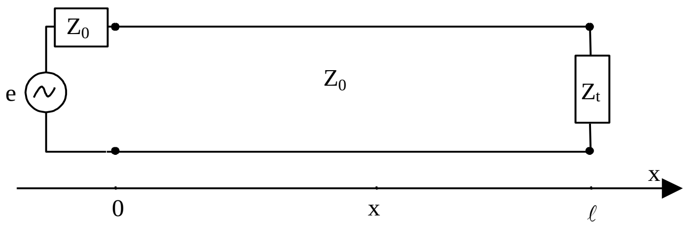
Mais le terme $\Re e\left(\frac{1}{2}V\,I^*\right)$ correspond à la puissance consommée dans la charge

En effet : $\Re e\left(\frac{1}{2}V\,I^*\right) = \Re e\left(\frac{1}{2}V_0 I_0 e^{j\varphi}\right) = \frac{1}{2}V_0 I_0 cos(\varphi)$ qui est bien la puissance moyenne cad dissipée définitivement dans la charge telle qu'on l'a calculée plus haut.

Remarque : On définit une grandeur équivalente en électromagnétisme qui est le vecteur de Poynting complexe $\vec{\Pi} = \frac{1}{2}\vec{\underset{\sim}{E}} \wedge \vec{\underset{\sim}{H}}^*$ dont le flux à travers une surface permet de calculer la puissance moyenne traversant cette surface sans devoir repasser en notation réelle.

2. Puissance transportée dans une ligne

A. Lignes quelconques



Quelle est la puissance dissipée (c'est à dire transmise définitivement) dans le tronçon de ligne situé à droite d'un plan d'abscisse x et dans la charge ?

On utilise la formule démontrée dans le paragraphe précédent : Puissance transmise à la charge $Z(x)$ vaut $\Re e\left(\frac{1}{2}V(x)\,I^*(x)\right)$

Or on a : $V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$ et $I(x) = \frac{1}{Z_0}\left[V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}\right]$

Il ne faut pas oublier dans le calcul qui va suivre que V_1 et V_2 sont 2 constantes complexes.

On peut encore écrire que : $V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} = V_1 e^{-\gamma x}(1+\Gamma(x))$

Et que : $I(x) = \frac{1}{Z_0}\left[V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}\right] = \frac{V_1 e^{-\gamma x}}{Z_0}(1-\Gamma(x))$

Donc

$$\bar{P}(x) = \Re e\left[\frac{1}{2}V(x)I^*(x)\right] = \Re e\left[\frac{1}{2}V_1 e^{-\gamma x}\left[1+\Gamma(x)\right]\frac{V_1^* e^{-\gamma^* x}}{Z_0}\left[1-\Gamma^*(x)\right]\right] = \frac{|V_1|^2}{2Z_0}\Re e\left[e^{-(\gamma+\gamma^*)x}\left[1+\Gamma\,(x)\right]\left[1-\Gamma^*(x)\right]\right]$$

or si on peut considérer que la ligne est à pertes faibles (cas le plus fréquent), alors Z_0 est réel donc :

$$\overline{P}(x)=\frac{|V_1|^2}{2Z_0}\Re e\left[e^{-(\gamma+\gamma^*)x}\left[1+\Gamma\ (x)\right]\left[1-\Gamma^*(x)\right]\right]$$

Or $\gamma=\alpha+j\beta$ donc $\gamma+\gamma^*=2\alpha$ donc : $\overline{P}(x)=\dfrac{|V_1|^2}{2Z_0}e^{-2\alpha x}\ \Re e\left[\left[1+\Gamma\ (x)-\Gamma^*(x)-\Gamma\ \Gamma^*\right]\right]$

Qui donne : $\overline{P}(x)=\dfrac{|V_1|^2}{2Z_0}e^{-2\alpha x}\left[1-|\Gamma(x)|^2\right]$

* Que représente le facteur $\dfrac{|V_1|^2}{2Z_0}e^{-2\alpha x}$?

Pour le savoir considérons une ligne sur laquelle seule l'onde incidente se propage car le coefficient de réflexion Γ_t sur la charge est nul. Il n'y a donc pas d'onde réfléchie et donc $\Gamma(x)$ est lui aussi nul quel que soit x.

On a alors $\overline{P}(x)=\dfrac{|V_1|^2}{2Z_0}e^{-2\alpha x}$

Le facteur $\dfrac{|V_1|^2}{2Z_0}e^{-2\alpha x}$ représente donc la puissance moyenne consommée à droite de x qui n'a pu être que transportée par l'onde incidente. Ce facteur est donc la puissance moyenne transportée par l'onde incidente. On remarque que la tension et le courant s'atténuant en $e^{-\alpha x}$ et la puissance incidente s'atténue en $e^{-2\alpha x}$.

Revenons dans le cas général d'une ligne sur laquelle circulent une onde incidente et une onde réfléchie. La puissance consommée à droite de x $\overline{P}(x)$ est donc la somme de 2 termes. Le premier terme est la puissance transportée par l'onde incidente et le second ne peut être que la puissance transportée par l'onde réfléchie de façon à ce que la différence des 2 donne la puissance restant à droite de x :

$$\overline{P}(x)=\overline{P}_{inc}(x)-\overline{P}_{ref}(x)$$

On remarque que l'onde réfléchie s'écrit en fonction de l'onde incidente comme :

$$\overline{P}_{ref}(x)=\frac{|V_1|^2}{2Z_0}e^{-2\alpha x}|\Gamma(x)|^2=\overline{P}_{inc}(x)|\Gamma(x)|^2$$

et donc que $|\Gamma(x)|^2=\dfrac{\overline{P}_{ref}(x)}{\overline{P}_{inc}(x)}$ $\boxed{\text{représente le coefficient de réflexion en puissance}}$.

La puissance consommée à droite de x est finalement donnée par la relation : $\overline{P}(x)=\overline{P}_{inc}(x)\left[1-|\Gamma(x)|^2\right]$

B. Lignes sans perte

Dans le cas des lignes sans perte, α est nul. On a alors : $\overline{P} = \frac{|V_1|^2}{2Z_0}\left[1-|\Gamma(x)|^2\right]$

C. Remarques :

* Dans le cas des lignes sans perte, la puissance transportée par l'onde incidente ne s'atténue pas en $e^{-2\alpha x}$, elle est constante et égale à : $\overline{P_{inc}} = \frac{|V_1|^2}{2Z_0}$

* Dans le cas des lignes sans perte, $|\Gamma(x)|=|\Gamma_t|$ ne dépend pas de x, donc $\overline{P} = \frac{|V_1|^2}{2Z_0}\left[1-|\Gamma_t|^2\right] = \overline{P_t}$ ne dépend pas de x.

* Dans le cas des lignes sans perte, la puissance dissipée à droite de x, ne peut l'être dans la ligne (ligne sans perte), l'est donc forcément dans la charge.

* Si la ligne est chargée par une impédance égale à l'impédance caractéristique (Z_t=Z_0) alors $\Gamma(x)$=0, alors la puissance dissipée est égale à la puissance incidente. La puissance incidente est alors totalement transmise à la charge. C'est un cas très important que nous détaillerons plus tard.

$$\boxed{\text{Si } Z_t=Z_0 \text{ alors } \overline{P}(x) = \overline{P}_{inc}(x)}$$

La puissance maximale pouvant être dissipée dans la ligne et la charge est donc est donc égale à la puissance transportée par l'onde incidente et correspond en x=0 à la puissance maximale que peut délivrer le générateur.

* Au contraire si la ligne est chargée par une impédance nulle, infinie ou purement complexe, la puissance dissipée dans la charge est nulle puisque $\Gamma(x=l)=\Gamma_t=1$, ce qui est logique puisque de telles charges ne peuvent consommer d'énergie.

D. Unité de la constante d'atténuation

On a vu que l'onde incidente dans une ligne s'écrit :

$V_{inc}(x) = V_1 e^{-\gamma x}$ où γ est la constante de propagation complexe égale à : $\gamma = \alpha + j\beta$

α est la constante d'atténuation, non nulle dans une ligne à pertes.

comme $\frac{|V(x)|}{|V(x+1)|} = e^{\alpha}$, on peut définir la constante d'atténuation comme $\alpha = \ln\left(\frac{|V(x)|}{|V(x+1)|}\right)$.

α s'exprime en Néper/m (Np/m)

On peut également définir cette constante d'atténuation en dB/m par : $\alpha_{dB/m} = 20\log_{10}\left(\frac{|V(x)|}{|V(x+1)|}\right)$

On a alors : $\alpha_{dB/m} = 20\log_{10}\left(e^{\alpha}\right)$ c'est-à-dire $\alpha_{dB/m} = 20\,\alpha_{Np/m}\log_{10}\left(e\right) = 20\,\alpha_{Np/m}\,0.434$

d'où la relation : $\boxed{\alpha_{dB/m} = 8.69\,\alpha_{Np/m}}$

3. Unités de puissance

On utilise couramment le watt (W) comme unité de puissance. Cependant d'autres unités sont très utilisées.

On définit le dBm comme : $P_{dBm} = 10\log_{10}(P_{mW})$.

On utilise aussi (moins souvent) le dBW : $P_{dBW} = 10\log_{10}(P_{W})$ dans le cas des applications de fortes puissances.

Puissance en W	Puissance en dBm	Puissance en dBW
0.1 mW	-10 dBm	-40 dBW
1 mW	0 dBm	-30 dBW
10 mW	10 dBm	-20 dBW
20 mW	13 dBm	-17 dBW
100 mW	20 dBm	-10 dBW
1 W	30 dBm	0 dBW

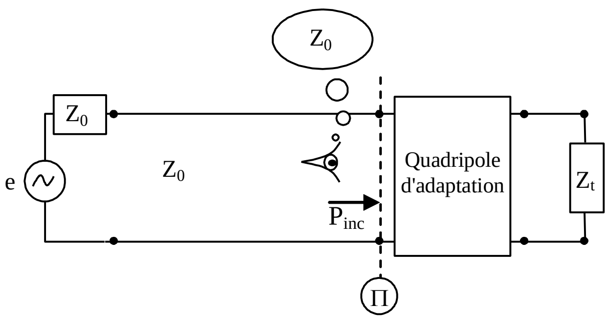
VIII. ADAPTATION

1. Introduction

On a vu dans le chapitre précédent que la puissance transmise à la charge est maximale lorsque le coefficient de réflexion est nul. L'onde incidente est alors totalement transmise à la charge. C'est un résultat important surtout si l'on réfléchit aux applications dans le domaine des hautes fréquences. Les fréquences élevées sont en effet quasiment réservées à la transmission d'informations à longue distance ou à très faible puissance : liaisons hertziennes (téléphonie sans fil (GSM, GPRS, UMTS, DECT,…), transmission télévisuelle (télévision numérique hertzienne, télévision par satellite,…), réseau sans fil de transmission de données (WIFI, Bluetooth, …), Radar, localisation par satellite, badge d'accès sans contact. Toutes ces applications ont en commun de devoir récupérer une information d'une onde souvent de très faible puissance qu'il n'est pas question de gaspiller. Il est donc important dans ce cas d'éviter que l'onde reçue ne soit en partie réfléchie.

De plus, lorsqu'une onde est réfléchie, on a vu dans les chapitres précédents qu'un régime d'ondes stationnaires prend naissance dans la ligne. Des ventres et des nœuds de tension sont alors distribués le long de la ligne. Si des récepteurs sont répartis sur la ligne, on ne peut alors garantir que la tension ne soit pas nulle sur certains d'entre eux (nœud) ou qu'au contraire elle ne soit pas plus élevée que ce qui normalement prévu (ventre). La conséquence peut être dans le meilleur des cas un réseau ne fonctionnant pas et, dans le pire, la destruction de certains appareils connecté au réseau. De plus, l'onde réfléchie se propageant en sens inverse vient se superposer à l'onde incidente, ce qui peut entraîner le brouillage de l'information et le blocage du réseau.

Pour toutes ces raisons, on s'arrange pour qu'aucune onde ne soit réfléchie. La charge doit alors être égale à l'impédance caractéristique de la ligne pour que le coefficient de réflexion soit nul. Dans le cas contraire, il faut alors ajouter sur la ligne un dispositif permettant de modifier la valeur apparente de cette charge. On appelle cela **adapter** la charge.



Si l'on place une charge désadaptée au bout de la ligne, un observateur situé à gauche du dispositif d'adaptation doit voir Z_0 en regardant dans la direction de la charge, c'est-à-dire ne doit pas voir d'onde réfléchie. On dit alors que l'on a réalisé l'adaptation de la charge.

Il faut de plus que l'adaptateur soit sans perte puisqu'un des buts de l'adaptation est justement d'être capable d'utiliser le peu de puissance disponible.

Remarque :

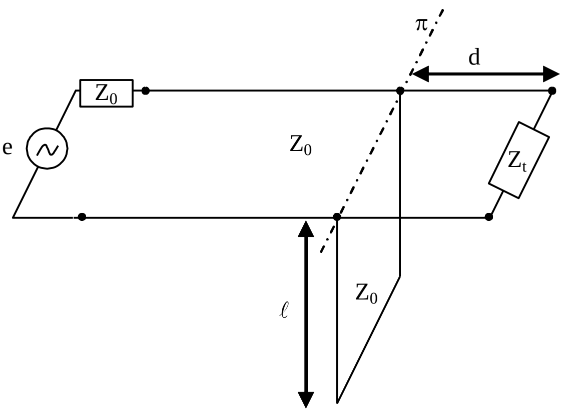
> En électronique basse fréquence, on utilise aussi le terme d'adaptation d'impédance. Un oscilloscope ou un amplificateur, par exemple, possèdent une impédance d'entrée très grande pour éviter de diminuer la tension que l'oscilloscope doit mesurer ou que l'amplificateur doit amplifier. La source de tension au contraire doit posséder une impédance de sortie la plus faible possible. Contrairement à notre préoccupation, il ne s'agit pas là d'optimiser le transfert de puissance mais de s'arranger pour ne pas "écrouler" la tension disponible.

Pour réaliser cette adaptation, on ajoutera des éléments en série ou en parallèle, ces éléments étant soit des éléments localisés (capacité, inductances) soit des tronçons de lignes.

Nous verrons dans la suite différents dispositifs d'adaptation utilisant des lignes, tandis que nous ne développerons pas ceux qui utilisent des éléments localisés car ils seront abordés en travaux dirigés.

2. Adaptation à un stub

On place entre le générateur et la charge désadaptée un tronçon de ligne de longueur ℓ terminé par une charge purement réactive, ici un court-circuit. Ce stub est placé à la distance d de la charge. Il faut déterminer la distance et la longueur de la ligne pour que l'adaptation soit réalisée, c'est-à-dire pour que l'impédance vue dans le plan du stub (s=ℓ) soit égale à Z_0 :



On doit avoir $Z_\pi = Z_0$ c'est-à-dire $z_\pi = 1$.

C'est la condition d'adaptation.

Etant donné que le stub et que la ligne de longueur d terminée par Z_t sont en parallèle, on va raisonner en admittance.

On ramène d'abord la charge Z_t :

$$Z_t \longrightarrow z_t \longrightarrow y_t \xrightarrow[\text{sur une distance } d]{\text{déplacement vers le générateur}} y_r = a_r + j\, b_r$$

puis on ramène le court-circuit situé en bout de stub :

$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \infty \xrightarrow[\text{sur une distance } l]{\text{déplacement vers le générateur}} y_s = j\, b_s$

On rappelle qu'un court-circuit ramené sur une distance quelconque est toujours purement imaginaire comme on l'on vu au V.2.B.

L'admittance réduite totale dans le plan Π vaut :

$y_\pi = y_r + y_s = a_r + j\,(b_r + b_s)$

La condition d'adaptation $z_\pi = 1$ devient en admittance $y_\pi = 1$.

Cette condition en terme de partie réelle et partie imaginaire est équivalente à $a_r = 1$ et $b_r + b_s = 0$

La 1ere ligne signifie que la partie réelle de y_π (y_t ramenée dans le plan Π) doit être égale à 1. La seconde que le rôle du stub ($y_s = jb_s$) est d'annuler la partie imaginaire de y_π.

L'adaptation se fait donc en deux temps, il faut ramener la charge à une distance d telle que sa partie réelle vaille 1, puis placer un stub en parallèle à cet endroit, d'une longueur telle qu'il annule la partie imaginaire de la charge ramenée.

Un tel exercice d'adaptation à un stub sera traité en TD à l'abaque de Smith. On peut toutefois discuter des propriétés d'un tel type d'adaptation.

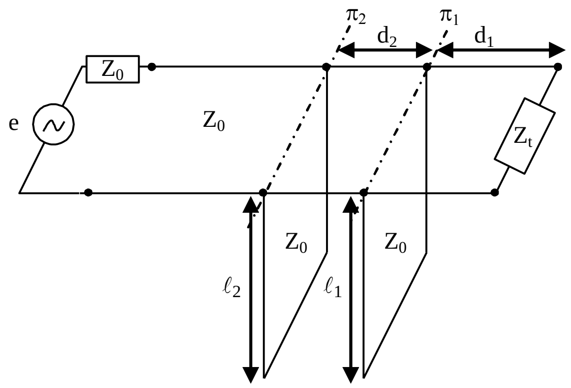
Remarques :

- Cette adaptation n'utilise que des lignes de transmission. Les longueurs de ces lignes sont déterminées "modulo" $\lambda/2$. On a donc une infinité de solutions ce qui laisse à l'opérateur la possibilité d'éloigner plus ou le moins le stub selon la place dont il dispose.
- On peut choisir d'utiliser un stub d'impédance caractéristique différent de la ligne principale pour "moduler" la longueur du stub.
- Cette adaptation permet d'adapter n'importe quelle charge à condition de pouvoir placer le stub librement, ce qui est parfois impossible. Par exemple, sur une chaîne de fabrication, si les caractéristiques de la charge à adapter varie sur chaque carte à cause de la dispersion des caractéristiques des composant, il est difficile voire impossible de modifier le circuit imprimé. On préfère, dans ce cas, utiliser une adaptation à 2 stubs, dans laquelle les stubs sont fixes et seules les longueurs sont à modifier au cas par cas. Une telle adaptation à 2 stubs sera traitée en Travaux Pratiques.

3. Autres types d'adaptation

A. Adaptation à 2 stubs

Comme on vient de le dire, l'adaptation utilise 2 stubs fixes. Seules les longueurs sont à déterminer pour réaliser l'adaptation.



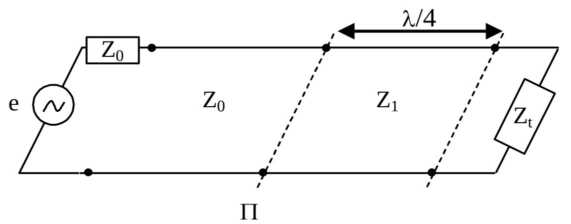
Remarques :

- Une adaptation à 2 stubs ne peut adapter n'importe quelle charge. S'il est nécessaire de modifier l'adaptation après fabrication, il est donc indispensable de prévoir un 3ème stub non connecté à la ligne mais qu'il sera alors possible de connecter en cas de besoin.

- Les stubs sont fixes, ce qui permet de retoucher l'adaptation plus facilement en modifiant simplement la longueur des stubs à l'aide d'une peinture conductrice (laque d'argent par ex) ou en les rognant. On pouvait se permettre de faire cela en sortie d'unité de fabrication quand les utilisateurs étaient prêts à payer une fortune, mais cela ne se fait plus maintenant alors que les circuits sont destinés en majorité aux dispositifs grand public dont les prix de revient doivent être très bas. Les circuits intégrés haute fréquence sont maintenant fabriqués en très grande quantité, les procédés de fabrications très fiables et les composants tous identiques. On est donc assuré d'obtenir les résultats simulés, et l'étape d'ajustement est devenue inutile.

B. Adaptation quart d'onde

On place une ligne de longueur l/4 entre la charge Z_t et la ligne Z_0.



Il faut calculer l'impédance caractéristique Z_1 de la ligne quart d'onde qui permet de réaliser l'adaptation de Z_t.

$$Z_t \longrightarrow z_t = \frac{Z_t}{Z_1} \xrightarrow[\text{sur une distance } \lambda/4]{\text{déplacement vers le générateur}} z_r = \frac{1}{z_t} = \frac{Z_1}{Z_t} \longrightarrow Z_r = \frac{Z_1^2}{Z_t}$$

La condition d'adaptation est : $Z_r = Z_0$

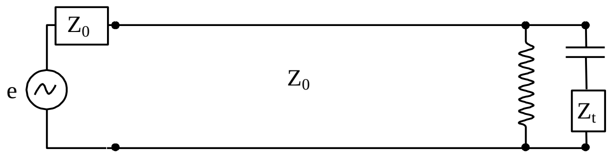
ce qui donne : $Z_0 = \frac{Z_1^2}{Z_t}$

c'est-à-dire $Z_1 = \sqrt{Z_0\, Z_t}$

Il faut toutefois remarquer que Z_0 etZ_1 sont des impédances caractéristiques et sont par conséquent réelles. Z_t doit donc être lui-même réel. Seules les charges réelles sont donc adaptables par ce dispositif.

C. Adaptation à l'aide d'éléments localisés

On peut réaliser une adaptation en utilisant des composants sans pertes disposés autour de la charge. La figure suivante montre un exemple d'adaptation selon ce principe.



Il faut remarquer que selon la charge, les éléments à disposer peuvent changer. Une telle adaptation sera traitée en Travaux dirigés.

IX. PERTES DANS LES LIGNES DE TRANSMISSION

1. Introduction – Origines physique des pertes

A. Dans les conducteurs

Un conducteur "normal" oppose une résistance au passage du courant électrique. En effet, le courant électrique est assuré par le déplacement de charges électriques. Ces charges en mouvement rencontrent des obstacles durant leur déplacement (atomes constituant le matériau). Une partie de l'énergie électrique ayant servi à mettre en mouvement ces charges est donc transformée en énergie mécanique et en chaleur. Ces pertes sont nommées pertes par effet Joule. On appelle résistivité électrique ρ (unité Ω.m) d'un matériau, le coefficient qui permet le calcul de sa résistance électrique à partir de ses dimensions physiques. Par exemple, un barreau de section S et de longueur l présente une résistance électrique R égale à : $R = \rho\, l \,/\, S$

La conductivité électrique d'un matériau σ en $\Omega^{-1}.m^{-1}$ ou S (Siemens) est reliée à la résistivité par la relation : $\rho=1/\sigma$

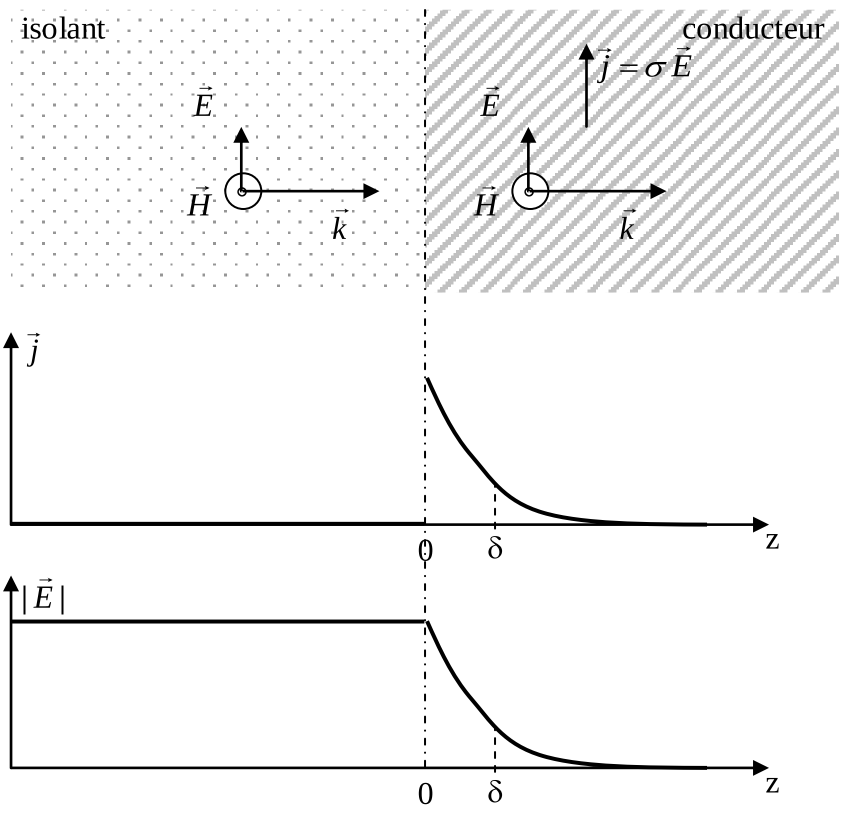
Les pertes par effet joule sont donc d'autant plus grandes que la section de matériau traversée par le courant est faible

Une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur subit une atténuation puisqu'une résistance s'oppose à la circulation du courant qu'elle induit dans le conducteur. La constante d'atténuation correspondante vaut $\alpha = 1/\delta$ où δ est l'épaisseur de peau. L'onde s'affaiblit donc en $e^{-z/\delta}$. L'épaisseur de peau représente l'épaisseur à partir de laquelle l'onde est diminuée d'un facteur 1/e (environ 0.37).

On a $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\omega \mu \sigma}}$ où ω est la pulsation, μ est la perméabilité magnétique du métal et σ est la conductivité.

On peut remarquer que l'épaisseur de peau diminue avec la fréquence de l'onde. Par exemple, l'épaisseur de peau dans le cuivre vaut 2μm à 1 GHz contre 2mm à 1 kHz

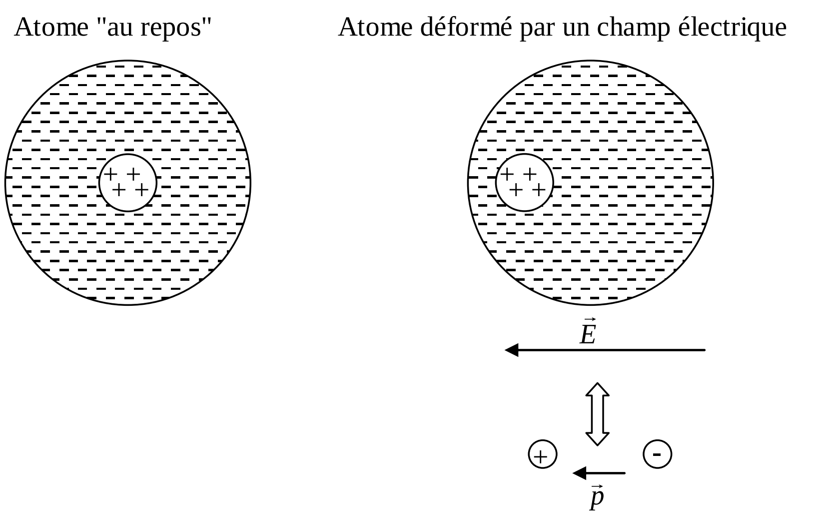
Lorsqu'une onde électromagnétique se propage à proximité ou dans un conducteur, le courant induit dans le conducteur s'étend sur une profondeur de l'ordre de l'épaisseur de peau à partir de sa périphérie. La section de conducteur traversée par le courant diminue donc d'autant plus que la fréquence de l'onde est grande, la résistance et donc les pertes augmentent d'autant. En haute fréquence, ces pertes peuvent devenir importantes.



Répartition de la densité de courant et du champ électrique dans une structure isolant/conducteur

B. Dans les isolants

Lorsqu'un champ électrique est appliqué sur un isolant, les charges électriques contenues dans le noyau des atomes et le nuage électronique subissent des forces. Ces forces tendent à modifier leur répartition spatiale (voir figure ci-dessous). Alors que l'atome "au repos" est spatialement neutre (le barycentre des charges positives et des charges négatives sont confondus) l'atome soumis à l'application d'un champ électriques s'est déformé. Les barycentres ne sont plus confondus et le tout est équivalent à un dipôle électrique $\vec{p}$ (C.m^3)



Il apparait donc un terme supplémentaire dans le déplacement électrique, noté $\vec{P}$, appelé polarisation et égal à la somme de tous les dipôles électriques par unité de volume ($\vec{P}$ en C/m^2). $\vec{P}$ s'ajoute au déplacement électrique dans le vide (ε_0 E).

On a donc : $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Dans le cas des milieux linéaires : $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ où χ est la susceptibilité électrique du matériaux.

Le déplacement peut donc s'écrire : $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0 (1+\chi)$

On définit ε_r la permittivité relative du diélectrique par $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ et vaut donc $\varepsilon_r = (1+\chi)$

Pour une onde électromagnétique, le champ électrique varie au cours du temps et la polarisation "tente" de suivre le champ, ce qui entraine des pertes par échauffement. Ces pertes sont d'autant plus grandes que la fréquence de l'onde est grande.

À quelques GHz, les pertes diélectriques sont en général plus importantes que les pertes dans les conducteurs.

Du point de vue des ondes (V, I) qui se propagent dans une ligne bifilaire, on peut tenir compte de ces pertes diélectriques en ajoutant un terme aux pertes par effet joule. On ajoute dans le modèle équivalent de la ligne une conductance parallèle G (ce qui a été fait dans le 2nd chapitre de ce polycopié).

L'admittance totale parallèle vaut donc : $Y = G + jC\omega$

ou encore : $Y = jC\omega\left(1 - j\dfrac{G}{C\omega}\right)$

Le terme $G/C\omega$ est appelé tangente de perte et noté : $tg(\delta) = \frac{G}{C\omega}$. Il représente les pertes diélectriques du matériau. Un tableau ci-dessous donne les valeurs de tangente de perte pour quelques matériaux usuels dans le domaine des micro-ondes.

CARACTERISTIQUES DES PRODUITS DIELECTRIQUES "ORGANIQUES"

Constante diélectrique DK@10 GHz	Facteur de dissipation (Tan δ) typ @ 10 GHz	Coefficient de dilatation thermique (C.T.E) ppm / °C X	Y	Z	Conductivité thermique W / m.°K	Résistivité volume MΩ-cm	Résistivité surface MΩ	Rigidité diélectrique KVolts	Constitution du composite laminé	Référence(s) du ou des produit(s)	Fournisseur
1.15-1.35	0.0002-0.0004	25	25	x	x	x	10^{4}	3 / mil	polymère microporeux	FoamClad 100	Arlon
2.08+/-0.02	0.0006	25	35	260	0.272	10^{9}	10^{7}	50	tissu de verre / PTFE	NY9208	Neltec
2.1	0.00045	227	227	227	0.25	10^{12}	10^{11}	170 / mm	PTFE	CuFlon	Polyflon
"	0.0009	20	35	290	0.4	10^{7}	10^{7}	> 60	"	TLY5A	Taconic
2.17 - 2.20	0.0009	25	34	252	0.261	1.4x10^{9}	2.9x10^{6}	> 45	"	DiClad 880	Arlon
"	0.0009	29	28	246	0.261	2.3x10^{8}	3.4x10^{6}	> 45	tissu de ve.c * /PTFE	CuClad217LX	Arlon
"	0.0013	46	47	236	0.263	1.5x10^{10}	10^{9}	> 45	fibre de ve.n.t */PTFE	Isoclad 917	Arlon
2.2+/-0.02	0.0009	31	48	237	0.2	2x10^{7}	3x10^{7}	x	"	RTduroïd5880	Rogers
2.32+/-0.005	0.0002	108	108	108	x	x	10^{6}	0.5 /mil	polyolefin	Polyguide	Polyflon
2.33+/-0.02	0.0013	17	29	217	0.257	1.5x10^{9}	3.4x10^{7}	>45	tissu de verre / PTFE	DiClad 870	Arlon
"	0.0013	23	24	194	0.258	8x10^{8}	3.4x10^{6}	>45	tissu de ve.c * /PTFE	CuClad 233	Arlon
"	0.0016	31	35	203	0.263	3.5x10^{8}	10^{8}	>45	fibre de ve.n.t */PTFE	Isoclad 870	Arlon
"	0.0012	22	28	173	0.22	2x10^{7}	2x10^{8}	x	"	RTduroïd 5870	Rogers
2.4 +/- 0.04	0.0016	12	18	170	0.251	10^{8}	10^{7}	50	tissu de verre / PTFE	NX9240	Neltec
2.4 -2.6+/- .04	0.0022	15	15	200	0.24	2x10^{7}	4.1x10^{7}	>50	"	Ultralam 2000	Rogers
2.4 -2.6+/- .05	0.001	14	21	182	0.254	1.2x10^{9}	4.5x10^{7}	>45	"	Diclad 522	Arlon
"	0.0022	18	19	177	0.254	1.8x10^{9}	1.5x10^{8}	>45	tissu de ve.c * /PTFE	CuClad 250	Arlon
2.45 +/- 0.05	0.0006	9	12	140	0.34	10^{7}	10^{7}	>60	tissu de verre / PTFE	TLT0	Taconic
2.45 +/- 0.04	0.0019	9	12	140	0.34	10^{7}	10^{7}	>60	"	TLX0	Taconic
2.5 +/- 0.05	0.0018	12	15	95	0.235	1.2x10^{9}	4.5x10^{7}	>45	"	AD250	Arlon
2.55	0.0011	53	53	53	x	10^{10}	x	0.5/ mil	thermoplastique(PPO)	NorClad	Polyflon
2.53	0.00066	x	x	x	x	>10^{10}	>10^{8}	0.5/ mil	polystyrène	Rexolite1422	x
2.62	0.0014	x	x	x	x	5x10^{7}	5x10^{6}	0.5 /mil	polystyrène/ verre	Rexolite2200	x
2.6	0.0025	59	59	59	0.2	> 10^{10}	x	x	plastique (NORYL)	ComClad	Sheldahl
2.75 +/- 0.05	0.003	9	12	70	0.23	10^{7}	10^{7}	>60	tissu de verre / PTFE	TLC27	Taconic
2.94 +/- 0.04	0.0012	16	16	24	0.6	10^{6}	4x10^{6}	x	ve.n.t *,céram./PTFE	RTduroïd6002	Rogers
2.94	0.0025	10	12	40	0.5	1.4x10^{6}	1.3x10^{6}	>45	céramique / PTFE	CLTE	Arlon
2.94 +/- 0.07	0.0022	9	12	71	0.230	10^{8}	10^{7}	45	ve.t */céramique/PTFE	NH 9294	Neltec
2.95 +/- 0.05	0.0028	9	12	70	0.23	10^{7}	10^{7}	60	tissu de verre / PTFE	TLE-95	Taconic
3.0 +/- 0.04	0.0013	17	17	24	0.5	10^{6}	10^{7}	x	céramique / PTFE	RO 3003	Rogers
3.0 +/- 0.1	0.0014	11	21	125	0.2	1.26x10^{9}	1.46x10^{8}	>60	ve.t */céram./polymère	RF-30	Taconic
3.02 +/- 0.04	0.0016	13	13	56	0.5	10^{7}	10^{7}	x	verre tissé/céram./PTFE	RO 3203	Rogers
3.05	0.003	56	56	56	x	6.5x10^{11}	x	0.8/mil	thermoplastique (PEI)	ULTEM	Polyflon
3.2 +/- 0.05	0.0029	28	30	80	0.289	7x10^{6}	7x10^{5}	x	x	GML2032	GIL
3.2 +/- 0.05	0.004	32	32	70	0.228	8x10^{9}	5x10^{7}	x	polyester	GML1000	GIL

série NY
9217- DK=2.17 - tang δ=0.0008
9220- DK=2.20 - tang δ=0.0009
9233- DK=2.33 - tang δ=0.0011
autres caractéristiques identiques NY9208

série TLY
TLY5- DK=2.2 - tang δ=0.0009
TLY3- DK=2.35 -tang δ=0.0013
autres caractéristiques identiques TLY5A

série NX
9245- DK=2.45 - tang δ=0.0016
9250- DK=2.50 - tang δ=0.0017
9255- DK=2.55 - tang δ=0.0018
9260- DK=2.60 - tang δ=0.0019
9294- DK=2.94 - tang δ=0.0022
9300- DK=3.00 - tang δ=0.0023
9320- DK=3.20 - tang δ=0.0024
autres caractéristiques identiques NX9240

DiClad 527: tang δ= 0.0022
autres caractéristiques identiques DiClad 522

séries TLT et TLX
TLT9-TLX9 DK=2.5
TLT8-TLX8 DK=2.55
TLT7-TLX7 DK=2.6
TLT6-TLX6 DK=2.65
tang δ de la série TLT mesurée à 1 MHz
autres caractéristiques identiques TLT0 et TLX0

série AD
AD270- DK=2.7 - tangδ =0.0023
AD300- DK=3.0 - tang δ=0.003
AD320- DK=3.2 - tang δ=0.003
autres caractéristiques identiques AD250

TLC30: DK=3.0
TLC32: DK=3.2
autres caractéristiques identiques TLC27

série NH
9300- DK=3.00 - tang δ=0.0023
9320- DK=3.20 - tang δ=0.0024
9338- DK=3.38+/-0.1 - tang δ=0.0025
9348- DK=3.48+/-0.1 - tang δ=0.0030
9350- DK=3.50+/-0.1 - tang δ=0.0030
autres caractéristiques identiques NH9294

testé à 1.9 GHz

testé à 3 GHz

* ve.c = verre croisé
ve.n.t = verre non tissé
ve.t = verre tissé

autres matériaux et laminés hautes performances : Hitachi (Er=10), Matsushita (Er de 3.6 à 4.2), Krempel (Er =3.3,3.4), Gore (Er=3.4), Dupont (Er=3.5), Chukoh Flo (Er de 2.15 à 10), Various (Er de 4.5 à 4.9)

CARACTERISTIQUES DES PRODUITS DIELECTRIQUES "ORGANIQUES"

Constante diélectrique DK@10 GHz	Facteur de dissipation (Tan δ) typ @ 10 GHz	Coefficient de dilatation thermique (C.T.E) ppm / °C X	Y	Z	Conductivité thermique W / m.°K	Résistivité volume MΩ-cm	Résistivité surface MΩ	Rigidité diélectrique KVolts	Constitution du composite laminé	Référence(s) du ou des produit(s)	Fournisseur
3.2	0.010	9	13	x	x	10^{8}	10^{7}	>50-1.2/mil	epoxy	N4000-13SI	Nelco
3.27 +/- 0.032	0.002	16	16	20	0.7	3x10^{9}	>9x10^{9}	x	céramique/résine hy.	TMM 3	Rogers
3.32 +/- 0.05	0.005	12	22	80	0.208	10^{9}	9x10^{8}	2.3/mil	x	GML1100-3080	GIL
3.38 +/- 0.05	0.0027	11	14	46	0.64	1.7x10^{10}	4.2x10^{9}	x	céramique/résine hy.	RO4003C	Rogers
3.38	0.0025	15	15	52	0.45	2x10^{9}	4.4x10^{8}	x	céramique/résine ther.	25N	Arlon
3.38 +/- 0.05	0.005	24	26	80	0.253	2x10^{9}	10^{9}	x	x	GML 1034	GIL
3.48 +/- 0.05	0.0037	14	16	50	0.62	1.2x10^{10}	5.7x10^{9}	x	céramique/résine hy.	RO4350B	Rogers
3.5	0.0025	15	15	110	0.226	5x10^{8}	3.5x10^{7}	41	verre t. /céram. /PTFE	RF35P	Taconic
3.5	0.0018	19	24	64	0.2	1.3x10^{9}	1.5x10^{8}	41	"	RF35	Taconic
3.5 +/- 0.12	0.003	12	15	95	0.235	1.2x10^{9}	4.5x10^{7}	>45	verre t. /céram. /PTFE	AD350	Arlon
3.5 +/- 0.15	0.0026	35	35	107	0.31	3.4x10^{13}	4.6x10^{11}	>45	verre n.t. / " / "	AR350	Arlon
3.58 +/- 0.08	0.0035	16	18	59	0.45	4.2x10^{8}	8.9x10^{8}	x	céramique/résine ther.	25FR	Arlon
3.3 - 3.8	0.006	x	x	x	x	>10^{6}	>10^{4}	1.2 / mil	verre tissé /résine(PPO)	Getek II	GE
3.4 - 3.9	0.007	x	x	x	x	1.6x10^{6}	8x10^{4}	48 - 34/mil	verre tissé/ résine(PE)	Gigaver 210	Isola
3.55-3.74	0.004	x	x	x	x	x	x	x	epoxy / ?	MCL-LX-67	Hitachi
4.5 +/- 0.045	0.002	14	14	20	0.7	6x10^{8}	10^{9}	x	céramique/résine hy.	TMM4	Rogers
4.5	0.0035	30	30	102	0.32	3.3x10^{13}	4.8x10^{11}	>45	verre n.t./céram./PTFE	AR450	Arlon
6 +/- 0.15	0.0035	12	14	62	0.431	1.5x10^{12}	3.9x10^{9}	>45	"	AR600	Arlon
6 +/- 0.08	0.0023	16	16	20	0.72	10^{8}	10^{9}	x	céramique/résine hy.	TMM6	Rogers
6.15 +/- 0.25	0.0028	11	13	75	0.539	2.2x10^{8}	1.1x10^{8}	44	verre t. /céram. /PTFE	Orcer RF-60	Taconic
6.15 +/- 0.15	0.002	17	17	24	0.61	10^{3}	10^{3}	x	céramique/PTFE	RO3006	Rogers
6.15 +/- 0.15	0.0019	47	34	117	0.49	2x10^{7}	7x10^{7}	x	"	RTduroïd6006	Rogers
9.2 +/- 0.230	0.0023	16	16	20	0.76	2x10^{8}	4x10^{7}	x	céramique / résine hy.	TMM10	Rogers
9.8 +/- 0.245	0.002	16	16	20	0.76	2x10^{8}	4x10^{7}	x	"	TMM10i	Rogers
10	0.003	14	16	37	0.645	1.4x10^{9}	1.8x10^{9}	>45	verre t. /céram. /PTFE	AR1000	Arlon
10	0.0035	13	15	46	0.29	2.1x10^{8}	1.1x10^{7}	44	"	Orcer CER-10	Taconic
10.2 +/- 0.25	0.0023	24	24	24	0.78	5x10^{6}	5x10^{6}	x	céramique / PTFE	RTduroïd6010LM	Rogers
10.2 +/- 0.3	0.0023	17	17	24	0.66	10^{3}	10^{3}	x	"	RO3010	Rogers
10.2 +/- 0.5	0.0027	13	13	34	0.81	10^{4}	10^{4}	x	verre t. /céram. / PTFE	RO3210	Rogers

N4000-13: DK=3.60 - tangδ = 0.014
N5000: DK=3.60 - tangδ = 0.014
N7000: DK=3.5 et 3.8 - tangδ = 0.015
les 3 substrats ci-dessus testés à 1MHz
N8000 (cyanate ester) DK=3.5- tangδ = 0.011
autres caractéristiques à vérifier auprès de NELCO

Getek X: DK=3.3 à 3.8 - tang δ= 0.009
Getek: DK=3.8 à 4.2 - tang δ = 0.015
Getek testé à 1MHz
autres caractéristiques à vérifier auprès de GE

Duramid-E-Cu: DK=3.8 - tang δ= 0.022
FR408: DK=3.8 - 3.9 - tang δ= 0.01
Duraver: DK=3.9 à 4.2 - tang δ= 0.012
G200: DK=4.1 - tang δ= 0.013
autres caractéristiques à vérifier auprès de Isola

PPO, PE, PTFE= polymères de hautes performances
résine hy. = résine hydrocarboné
résine ther. = résine thermodurcissable
verre t. = verre tissé
verre n.t. =verre non tissée

autres matériaux et laminés hautes performances : Hitachi (Er=10), Matsushita (Er de 3.6 à 4.2), Krempel (Er =3.3,3.4), Gore (Er=3.4), Dupont (Er=3.5), Chukoh Flo (Er de 2.15 à 10), Various (Er de 4.5 à 4.9)

Il faut noter que PTFE est le matériau connu sous le nom commercial de "Téflon".

C. Autres causes de pertes

- pertes par excitation de modes supérieurs

- conduction dans l'isolant

2. Constante d'atténuation

On a vu que l'onde incidente dans une ligne s'écrit :

$V_{inc}(x) = V_1 e^{-\gamma x}$ où γ est la constante de propagation complexe égale à : $\gamma = \alpha + j\beta$

α est la constante d'atténuation, non nulle dans une ligne à pertes.

comme $\dfrac{|V(x)|}{|V(x+1)|} = e^{\alpha.1}$, on peut définir la constante α comme $\alpha = \ln\left(\dfrac{|V(x)|}{|V(x+1)|}\right)$.

α s'exprime en Néper/m (Np/m)

On peut également définir cette constante d'atténuation en dB/m par : $\alpha_{dB/m} = 20\log_{10}\left(\dfrac{|V(x)|}{|V(x+1)|}\right)$

On a alors : $\alpha_{dB/m} = 20\log_{10}\left(e^{\alpha}\right)$ c'est-à-dire $\alpha_{dB/m} = 20\,\alpha_{Np/m}\log_{10}\left(e\right) = 20\ \alpha_{Np/m}\ 0.434$

d'où la relation : $\alpha_{dB/m} = 8.69\ \alpha_{Np/m}$

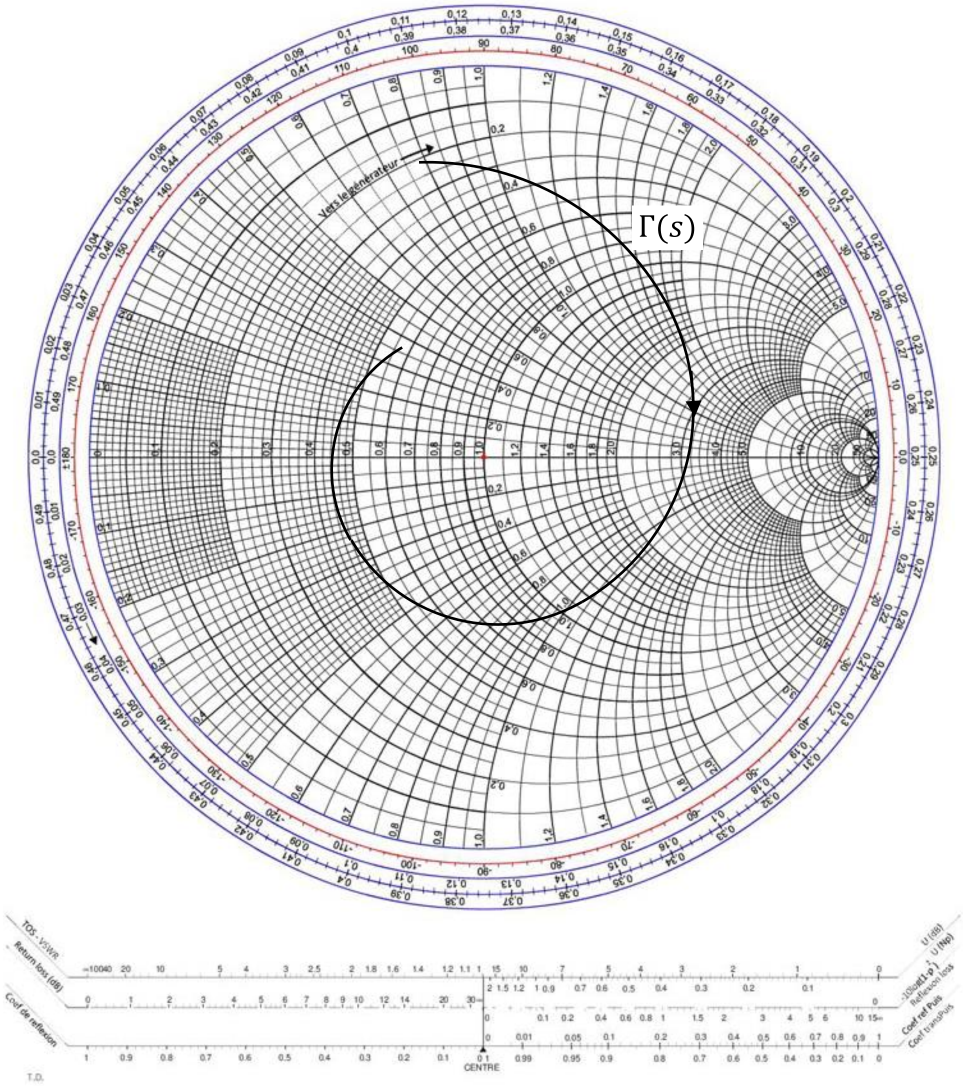
3. Lieu de Γ sur l'abaque de Smith

On a vu que $\Gamma(s) = \Gamma_t\, e^{-2\gamma s}$ où Γ_t est le coefficient de réflexion sur la charge : $\Gamma_t = \rho_t e^{j\theta_t}$

On a donc $\Gamma(s) = \rho_t\, e^{-2\alpha s}\, e^{j(\theta_t - 2\beta s)}$

Quand on se déplace sur la ligne en direction du générateur, l'argument de Γ ($\theta_t - 2\beta s$)et le module de Γ ($\rho_t\, e^{-2\alpha s}$) diminuent. La courbe de Γ en fonction de s correspond donc à une spirale logarithmique comme on le voit sur l'abaque ci-dessous.

<u>Remarque</u> : Quand la ligne est très grande, le coefficient de réflexion en entrée de ligne (s grand) est quasiment nul, ce qui est logique puisque l'onde réfléchie par la charge se propage sur une grande distance et est donc totalement dissipée.


Vers le générateur
$\Gamma(s)$
TOS - VSWR
Return loss (dB)
Coef de reflexion
CENTRE
Coef ref Puis
Coef transPuis
Reflexion loss
T.D.

X. MATRICE DE DISTRIBUTION OU MATRICE S

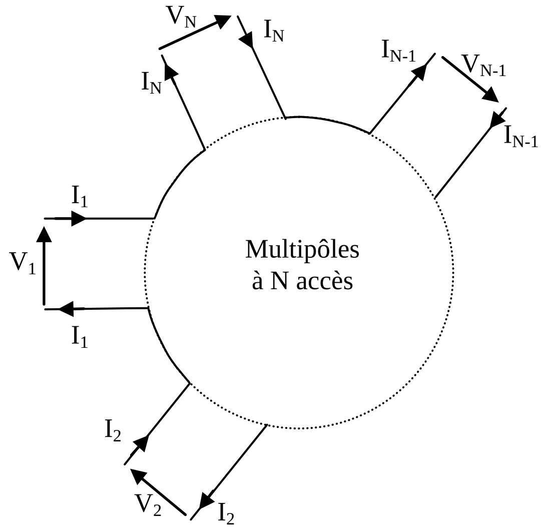
1. Introduction

La matrice S ou "Scattering Matrix" est un outil essentiel de caractérisation de multipôles en hyperfréquence. Les coefficients de cette matrice, appelés paramètres S, lient les puissances entrantes dans un multipôle aux puissances sortantes.

On peut se demander pourquoi définir une nouvelle matrice alors qu'il existe déjà de nombreuses autres matrices en électronique caractérisant un multipôle !

Ainsi la matrice impédance [Z] relie les tensions aux bornes d'un multipôle aux courants :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & . & Z_{1n} \\ . & Z_{22} & . & . \\ . & . & . & . \\ Z_{n1} & . & . & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ I_n \end{bmatrix}$$



Ou la matrice admittance [Y] :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & . & Y_{1n} \\ . & Y_{22} & . & . \\ . & . & . & . \\ Y_{n1} & . & . & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ V_n \end{bmatrix}$$

Plus classique encore, la matrice hybride [H] est utilisée par exemple pour caractériser des transistors bipolaires linéarisés :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

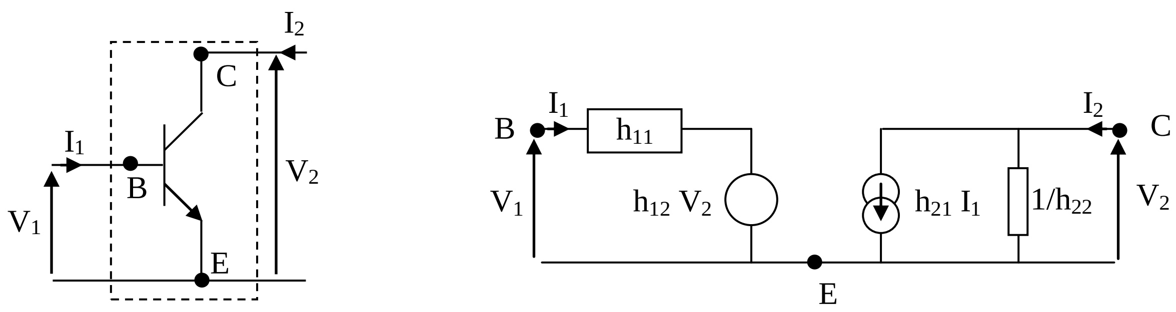


Schéma équivalent linéaire d'un transistor bipolaireen basse fréquence autour d'un point de polarisation où h_{12} et $1/h_{22}$ sont souvent négligés car très faibles et h_{21} est souvent appelé β.

On utilise aussi les matrices cascades (matrice de transfert [T] par exemple) qui permettent de calculer facilement la matrice globale d'une cascade de quadripôles en faisant le produit des matrices cascades de chacun des quadripôles.

Cependant toutes ces matrices relient les tensions et courants aux bornes des multipôles. Or, en hyperfréquence, il est très difficile d'accéder à ces grandeurs, alors qu'il beaucoup plus facile de mesurer des puissances. De plus, les puissances mises en jeu dans la majorité des applications en hyperfréquence (émission/réception d'ondes) sont très faibles. Ainsi un téléphone portable (GSM 900MHz ou DCS 1800MHz) doit être capable de fonctionner avec une puissance de -108dBm (environ 10^{-14} W...). Il est donc important de savoir comment les faibles puissances mises en jeu sont distribuées à la traversée d'un multipôle. Pour toutes ces raisons, les matrices de distribution sont un outil indispensable caractérisant la répartition des puissances.

2. Définition

Soit un multipôle linéaire (ou linéarisé) à N accès (2N pôles). Les ondes incidentes (V_k^+ et I_k^+) dans le plan de référence de l' accès k et les ondes réfléchies (V_k^- et I_k^-) par l'accès k donnent naissance à une tension V_k et un courant I_k qui s'écrivent :

$$V_k = V_k^+ + V_k^- \quad \text{et} \quad I_k = I_k^+ - I_k^- = \frac{1}{Z_k}\left[V_k^+ - V_k^-\right]$$

où Z_k est l'impédance caractéristique de référence de l'accès k, c'est-à-dire l'impédance caractéristique de la ligne d'alimentation qui est utilisé pour faire les mesures ou les calculs.

Les puissances incidente (onde P_k^+) et réfléchie (onde P_k^-) sur l'accès k s'expriment comme :

$$P_k^+ = \frac{1}{2}\Re e(V_k^+ (I_k^+)^*) = \frac{1}{2}\Re e\left[\frac{V_k^+ (V_k^+)^*}{Z_k}\right]$$

c'est-à-dire si Z_k est réel (lignes à faibles pertes) : $P_k^+ = \frac{|V_k^+|^2}{2Z_k}$

et de la même manière :

$$P_k^- = \frac{|V_k^-|^2}{2Z_k}$$

Dans le cas des lignes avec pertes on écrit :

$$P_k^+ = \frac{1}{2}\Re e(V_k^+ (I_k^+)^*) = \frac{1}{2}\Re e(Z_k I_k^+ (I_k^+)^*)$$

$$= \frac{|I_k^+|^2}{2}\Re e(Z_k) = \frac{|I_k^+|^2}{4}(Z_k + Z_k^*)$$

c'est-à-dire : $P_k^+ = \frac{|V_k^+|^2}{4|Z_k|^2}(Z_k + Z_k^*)$

et de même $P_k^- == \frac{|V_k^-|^2}{4|Z_k|^2}(Z_k + Z_k^*)$

On pourrait caractériser le multipôle en reliant les ondes de puissances P_k^+ et P_k^-, mais toute notion de déphasage a disparue en passant en puissance. On préfère donc définir les ondes a_k et b_k comme suit :

$$a_k = \frac{V_k^+}{\sqrt{Z_k}} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{V_k^-}{\sqrt{Z_k}}$$

et on retrouve

$$P_k^+ = \frac{|a_k|^2}{2} \quad \text{et} \quad P_k^- = \frac{|b_k|^2}{2}$$

les ondes a_k et b_k sont donc homogènes à des $\sqrt{\text{puissances}}$.

Dans le cas des lignes avec pertes on écrit :

$$a_k = \frac{V_k^+}{2}\frac{\sqrt{Z_k + Z_k^*}}{|Z_k|}$$

et :

$$b_k = \frac{V_k^-}{2}\frac{\sqrt{Z_k + Z_k^*}}{|Z_k|}$$

et de même

$$P_k^- == \frac{|V_k^-|^2}{2|Z_k|^2}(Z_k + Z_k^*)$$

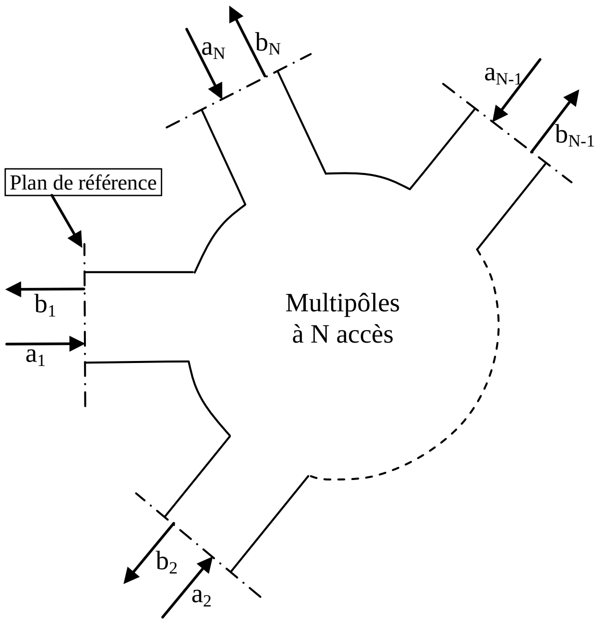
Définition : On appelle Matrice S la matrice qui lie le vecteur ondes entrantes [a] au vecteur ondes sortantes [b].

Ce qui peut s'exprimer de la manière suivante : $[b] = S\,[a]$

ou encore
$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1N} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ S_{N1} & . & \dots & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_N \end{bmatrix}$$

ou encore
$$\begin{cases} b_1 = S_{11}\,a_1 + S_{12}\,a_2 + \dots + S_{1N}\,a_N \\ . \\ . \\ . \\ b_N = S_{N1}\,a_1 + S_{N2}\,a_2 + \dots + S_{NN}\,a_N \end{cases}$$

ou encore : $b_j = \sum_{k=1}^{N} S_{jk}\,a_k$



La matrice S permet donc de calculer les ondes sortantes connaissant les ondes entrantes.

Remarques :

- La matrice S caractérise un multipôle linéaire (ou linéarisé à son point de polarisation) en régime alternatif.
- Les paramètres S_{jk} sont des nombres complexes.
- Les paramètres S_{jk} dépendent généralement de la fréquence.

- Les paramètres S_{jk} dépendent du plan de référence choisit et des impédances caractéristiques de référence.
- En général, les impédances de référence sont identiques sur tous les accès (Z_k=Z_0 $\forall$ k)

3. Signification physique des paramètres S

Nous supposerons dorénavant que les impédances de références Z_k sont toutes identiques et égales à Z_0 et que les lignes correspondantes sont à pertes faibles (sinon nulles) et donc que Z_0 est réelle. Cette hypothèse ne changera pas le principe des calculs que nous allons faire, et c'est de plus le cas le plus fréquent.

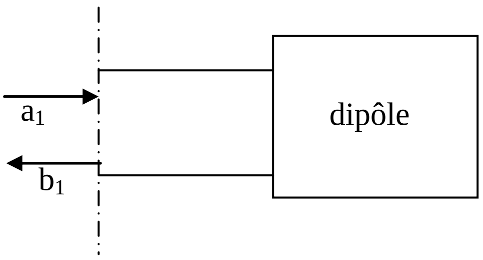
A. Cas du dipôle

Dans le cas d'un dipôle, on a un seul accès et 2 ondes a_1 et b_1.

La relation liant ces ondes est : $b_1 = S_{11}\, a_1$

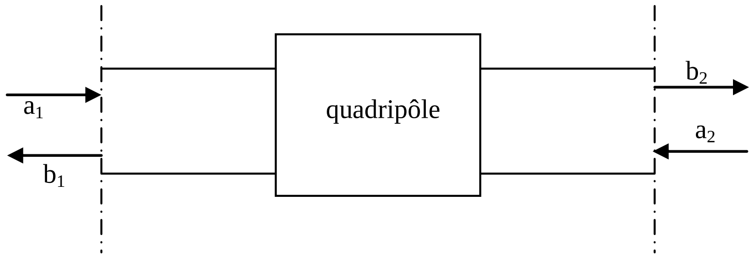
on a donc : $S_{11} = \frac{b_1}{a_1}$ ce qui peut s'écrire :

$$S_{11} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \Gamma_1$$



S_{11} est donc le <u>coefficient de réflexion</u> sur l'accès 1

B. Cas du quadripôle

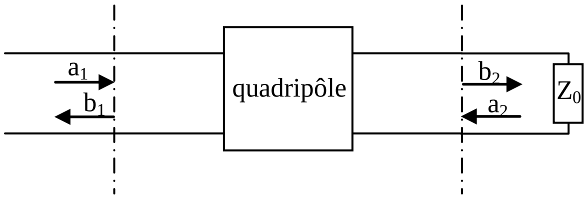


Dans le cas d'un quadripôle, les ondes entrante et sortante sont reliées par la relation :

$$\begin{cases} b_1 = S_{11}\, a_1 + S_{12}\, a_2 \\ b_2 = S_{21}\, a_1 + S_{22}\, a_2 \end{cases}$$

Pour interpréter les paramètres S, il faut faire une expérience particulière. Alimentons le quadripôle par l'accès 1 et chargeons l'accès 2 par une charge adaptée (c'est-à-dire une charge égale à l'impédance caractéristique de référence).

L'onde a_2 est donc par définition nulle puisqu'il n'y a pas de réflexion sur la charge adaptée. La relation précédente devient donc :



$$\begin{cases} b_1 = S_{11}\, a_1 \\ b_2 = S_{21}\, a_1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} S_{11} = \dfrac{b_1}{a_1} \\ S_{21} = \dfrac{b_2}{a_1} \end{cases}$$

(<u>Attention</u> ! relations valables uniquement dans le cadre de cette expérience ! ... cad si a_2=0)

ce qui signifie que dans le cadre de cette expérience particulière (a_2=0) on a :

$$\begin{cases} S_{11} = \left.\dfrac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \left.\Gamma_1\right|_{a_2=0} \\ S_{21} = \left.\dfrac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} = \left.\tau_{1->2}\right|_{a_2=0} \end{cases}$$

S_{11} est donc le coefficient de réflexion sur l'accès 1 quand aucune onde ne rentre par l'autre accès, c'est-à-dire lorsque aucune cause extérieure au quadripôle n'est responsable d'un retour d'onde.

On dit que <u>S_{11} est le coefficient de réflexion sur l'accès 1 propre au quadripôle</u>.

De plus S_{21} est le coefficient de transmission de l'accès 1 vers l'accès 2 lorsqu'aucune onde ne rentre par l'accès 2 c'est-à-dire "qu'aucun obstacle extérieur ne vient diminuer l'onde transmise".

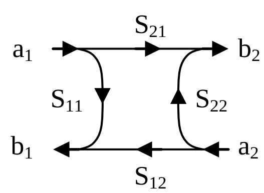
On dit que <u>S_{21} est le coefficient de transmission</u> de l'accès 1 vers l'accès 2 <u>propre au quadripôle</u>.

L'expérience symétrique (générateur sur l'accès 2 et une charge adaptée sur l'accès 1 : a_1=0) donnerait par le même raisonnement :

<u>S_{22} est le coefficient de réflexion sur l'accès 2 propre au quadripôle</u>, et

<u>S_{12} est le coefficient de transmission</u> de l'accès 2 vers l'accès 1 <u>propre au quadripôle.</u>

Les résultats précédents peuvent être représentés par le <u>graphe de transfert</u> suivant ci-contre.



C. Cas du multipôle

Nous généraliserons le résultat précédent au cas du multipôle. Ainsi :

S_{jj} est le coefficient de réflexion sur l'accès j lorsqu'aucune onde ne pénètre par les autres accès, et

S_{jk} est le coefficient de transmission de l'accès k vers l'accès j lorsqu'aucune onde ne pénètre par les accès autres que l'accès k c'est-à-dire

$$S_{jj} = \left.\frac{b_j}{a_j}\right|_{a_{i\neq j}=0} = \Gamma_j\big|_{a_{i\neq j}=0}$$

$$S_{jk} = \left.\frac{b_j}{a_k}\right|_{a_{i\neq k}=0} = \tau_{k\to j}\big|_{a_{i\neq k}=0}$$

La répartition de puissance se fait alors comme suit :

$|S_{jj}|^2$ est le coefficient de réflexion en puissance sur l'accès j lorsqu'aucune onde ne pénètre par les accès autres que l'accès j.

$|S_{jk}|^2$ est le coefficient de transmission en puissance de l'accès k vers l'accès j lorsqu'aucune onde ne pénètre par les accès autres que l'accès k.

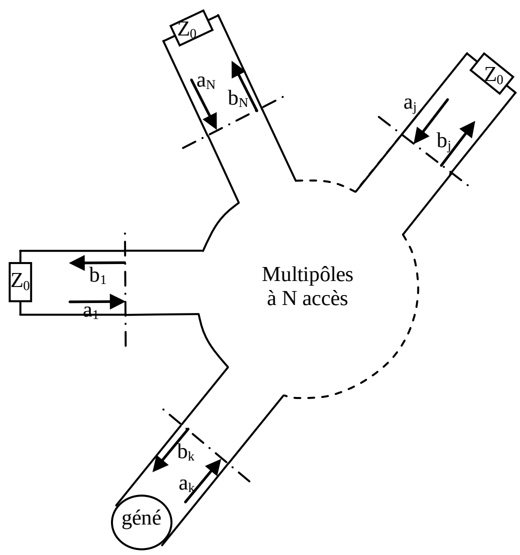
$$|S_{jj}|^2 = \left.\frac{P_j^-}{P_j^+}\right|_{a_{i\neq j}=0}$$

$$|S_{jk}|^2 = \left.\frac{P_j^-}{P_k^+}\right|_{a_{i\neq k}=0}$$

4. Détermination des paramètres S

Pour mesurer ou calculer un paramètre S, il faut toujours se placer dans le cadre d'une expérience particulière similaire à celle du paragraphe précédent pour isoler ce paramètre.

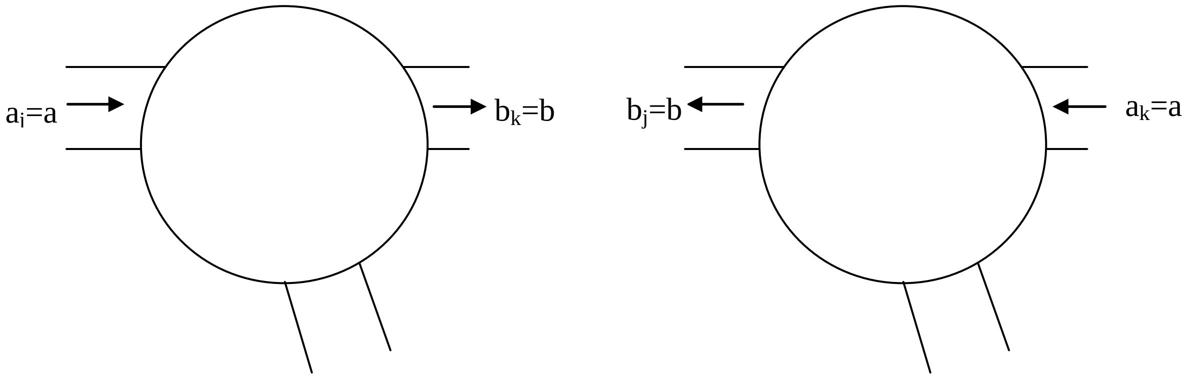
La mesure du paramètre S_{jk} ou S_{kk} nécessite l'expérience ci-contre de manière à annuler toute onde incidente dans les autres accès que k.



5. Propriétés des matrices S

A. Réciprocité des multipôles

Un multipôle réciproque est un multipôle qui respecte le **théorème de réciprocité** :



à gauche, une onde a entrant par l'accès j entraine une onde b sortant de l'accès k,

alors si le multipôle est réciproque,

on voit à droite qu'une onde a entrant par l'accès k entraine une onde b sortant de l'accès j.

Dans le cas de gauche, cela entraine que si tous les autres accès sont chargés par les impédance de références ($a_{i\neq j}$=0) alors $\frac{b}{a}=S_{kj}$, et dans le cas de droite, dans les même conditions d'expérience ($a_{i\neq k}$=0), $\frac{b}{a}=S_{jk}$.

Donc la réciprocité entraine : $S_{jk}=S_{kj}$ c'est-à-dire que <u>la matrice S est symétrique</u>, ce qui peut s'exprimer par $\boxed{S^t=S}$ où S^t est la matrice transposée de S.

Les multipôles linéaires et passifs sont en général réciproques. Ainsi les multipôles constitués de lignes et de composants passifs (résistances, capacités, inductances) sont réciproques. Au contraire, les dispositifs usants de matériaux magnétiques tels que les ferrites (circulateurs, isolateurs…) et les montages comprenant des dispositifs actifs (diodes, transistors, …) même linéarisés autour de leur point de polarisation, ne sont pas réciproques.

B. Multipôle passif et sans perte

Si un multipôle est passif (sans apport extérieur d'énergie) et sans pertes, on peut alors écrire la conservation de l'énergie comme :

$$\sum_{\text{tous les accès}} P_{entrante} = \sum_{\text{tous les accès}} P_{sortante} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{j=1}^{N}\frac{|a_j|^2}{2}=\sum_{j=1}^{N}\frac{|b_j|^2}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{j=1}^{N}\frac{a_j\,a_j^*}{2}=\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j\,b_j^*}{2}$$

ce qui peut s'exprimer encore de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_N \end{bmatrix}$$

or par définition les ondes entrantes et sortantes sont reliées par la relation : $[b]=[S]\,[a]$

donc $[a]^{t*}[a]=\left[[S]\,[a]\right]^{t*}\left[[S]\,[a]\right]=[a]^{t*}\,[S]^{t*}\,[S][a]$

donc $$[S]^{t*}\,[S]=I$$

Les multipôles passifs et sans perte possèdent donc une matrice S dont l'inverse est sa matrice conjuguée transposée.

<u>remarque</u> : si le multipôle est de plus réciproque, $[S]^t=[S]$ alors cette propriété devient $[S]^*\,[S]=I$

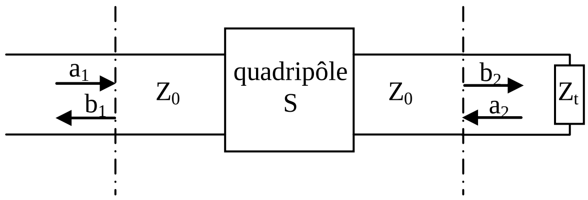
6. Application

A. Effet d'un changement de plan de référence

à développer

B. Calcul du coefficient de réflexion à l'entrée d'un quadripôle

Calculons le coefficient de réflexion à l'entrée d'un quadripôle chargé par une impédance quelconque Z_t.



On connait la matrice S du quadripôle et la charge Z_t placée en sortie de celui-ci.

On veut calculer Γ_1 : $\Gamma_1=\dfrac{b_1}{a_1}$

Les ondes entrantes et sortantes sont reliées par la relation de définition de [S] :

$$\begin{cases} b_1=S_{11}\,a_1+S_{12}\,a_2 & (1)\\ b_2=S_{21}\,a_1+S_{22}\,a_2 & (2)\end{cases}$$

donc à partir de la relation (1) : $\Gamma_1=\dfrac{b_1}{a_1}=S_{11}+S_{12}\dfrac{a_2}{a_1}$ (3)

Le coefficient de réflexion Γ_t sur la charge Z_t est connu et égal à : $\Gamma_t=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{Z_t-Z_0}{Z_t+Z_0}$

on remplace b_2 par a_2 / Γ_t dans la relation (2) : $\dfrac{a_2}{\Gamma_t}=S_{21}\,a_1+S_{22}\,a_2$

d'où : $a_2\left(\frac{1}{\Gamma_t}-S_{22}\right)=S_{21}\,a_1$

c'est-à-dire : $\frac{a_2}{a_1}=\frac{S_{21}}{\frac{1}{\Gamma_t}-S_{22}}=\frac{\Gamma_t\,S_{21}}{1-\Gamma_t\,S_{22}}$

qui en l'utilisant dans la relation (3) donne : $\Gamma_1=\frac{b_1}{a_1}=S_{11}+S_{12}\frac{\Gamma_t\,S_{21}}{1-\Gamma_t\,S_{22}}$

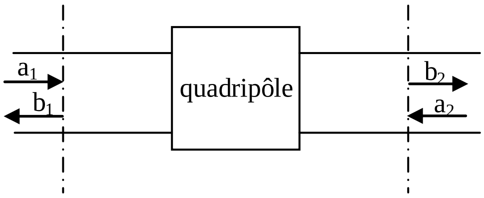
remarques :

- La réflexion à l'entrée du quadripôle est due au quadripôle lui-même (S_{11}) et à la réflexion sur la charge Z_t vue au travers du quadripôle.

- Si la charge Z_t est égale à l'impédance de référence Z_0 alors Γ_t vaut 0 et on retrouve Γ_1=S_{11}.

XI. Matrices Chaines

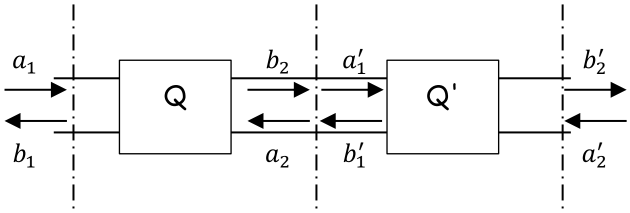
1. Matrice chaine des ondes



On définit la matrice de chaine des ondes comme suit : $\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$

La matrice C est chaînable. En effet, si l'on prend 2 quadripôles Q et Q' de matrice C respectivement égale à : $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{21} \\ C'_{12} & C'_{22} \end{bmatrix}$

Calculons la matrice chaine des 2 quadripôles montés en série.



<u>2 quadripôles en cascade</u>

On a alors : $\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ (1) et $\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ C'_{21} & C'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{bmatrix}$ (2)

comme $a'_1 = b_2$ et $b'_1 = a_2$ on peut remplacer le vecteur $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ dans (1) par le vecteur $\begin{bmatrix} a'_1 \\ b'_1 \end{bmatrix}$ donné par (2).

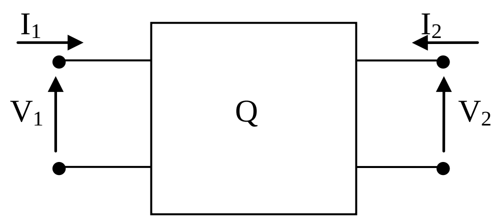
On a $\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ C'_{21} & C'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{bmatrix}$ et donc la matrice chaine de la cascade des 2 quadripôles est bien le produit des matrice C et C' : $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{21} \\ C'_{12} & C'_{22} \end{bmatrix}$

Cette matrice est peu utilisée contrairement à la matrice définie dans ce qui suit.

2. Matrice chaine ABCD

Les matrices de distribution S et de chaine des ondes C ne sont pas les seules utiles à l'étude des quadripôles. Nous allons présenter dans ce chapitre les matrice chaine en tension/courant appelées couramment matrices ABCD.

Sur le quadripôle de la figure suivante ont été tracés les tensions et courants sur les 2 accès.



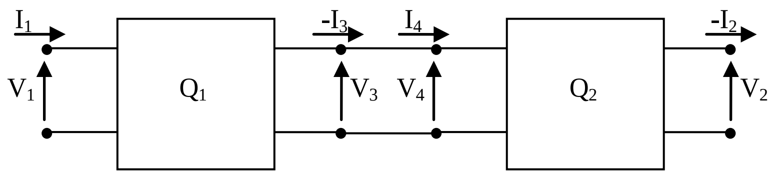
On définit la matrice de chaine ABCD comme suit : $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$

3. Propriétés de la matrice ABCD

A. La matrice ABCD est chaînable.

Prenons 2 quadripôles Q_1 et Q_2 de matrice ABCD respectivement égale à : $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$

Calculons la matrice ABCD des 2 quadripôles montés en série.



2 quadripôles en cascade

On a alors : $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ -I_3 \end{bmatrix}$ (1) et $\begin{bmatrix} V_4 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$ (2)

comme $I_4 = -I_3$ et $V_4 = V_3$ on peut remplacer le vecteur $\begin{bmatrix} V_3 \\ -I_3 \end{bmatrix}$ dans (1) par le vecteur $\begin{bmatrix} V_4 \\ I_4 \end{bmatrix}$ donné par (2).

On a $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$ et donc la matrice ABCD de la cascade des 2 quadripôles est bien le produit des matrice ABCD : $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$

B. Sens physique des coefficients de la matrice ABCD

On a les relations suivantes liant les tensions et courants :

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 + B(-I_2) \\ I_1 = CV_2 + D(-I_2) \end{cases}$$

Les coefficients diagonaux 1/A et 1/D sont respectivement le gain en tension lorsque le quadripôle est laissé en circuit ouvert (I_2=0) et le gain en courant lorsque le quadripôle est court-circuité (V_2=0) :

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \quad \text{et} \quad D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$

Les coefficients anti-diagonaux sont respectivement l'impédance de transfert lorsque le quadripôle est court-circuité (V_2=0) et admittance de transfert lorsque Q est laissé en circuit ouvert (I_2=0) :

$$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} \quad \text{et} \quad C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0}$$

C. Relations avec les paramètres S de la matrice de distribution.

Les relations liant les paramètres de la matrice S, de la matrice de chaine ABCD et de la matrice de chaine C sont donnés dans le tableau suivant.

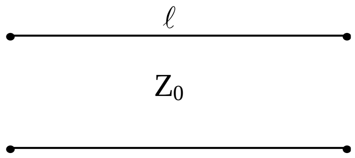
	S	Z	Y	$ABCD$
S_{11}	S_{11}	$\frac{(Z_{11}-Z_0)(Z_{22}+Z_0)-Z_{12}Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{(Y_0-Y_{11})(Y_0+Y_{22})+Y_{12}Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{A+B/Z_0-CZ_0-D}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{12}	S_{12}	$\frac{2Z_{12}Z_0}{\Delta Z}$	$\frac{-2Y_{12}Y_0}{\Delta Y}$	$\frac{2(AD-BC)}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{21}	S_{21}	$\frac{2Z_{21}Z_0}{\Delta Z}$	$\frac{-2Y_{21}Y_0}{\Delta Y}$	$\frac{2}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{22}	S_{22}	$\frac{(Z_{11}+Z_0)(Z_{22}-Z_0)-Z_{12}Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{(Y_0+Y_{11})(Y_0-Y_{22})+Y_{12}Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{-A+B/Z_0-CZ_0+D}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
Z_{11}	$Z_0\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{11}	$\frac{Y_{22}}{\|Y\|}$	$\frac{A}{C}$
Z_{12}	$Z_0\frac{2S_{12}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{12}	$\frac{-Y_{12}}{\|Y\|}$	$\frac{AD-BC}{C}$
Z_{21}	$Z_0\frac{2S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{21}	$\frac{-Y_{21}}{\|Y\|}$	$\frac{1}{C}$
Z_{22}	$Z_0\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{22}	$\frac{Y_{11}}{\|Y\|}$	$\frac{D}{C}$
Y_{11}	$Y_0\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{\|Z\|}$	Y_{11}	$\frac{D}{B}$
Y_{12}	$Y_0\frac{-2S_{12}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{12}}{\|Z\|}$	Y_{12}	$\frac{BC-AD}{B}$
Y_{21}	$Y_0\frac{-2S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{21}}{\|Z\|}$	Y_{21}	$\frac{-1}{B}$
Y_{22}	$Y_0\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{\|Z\|}$	Y_{22}	$\frac{A}{B}$
A	$\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	A
B	$Z_0\frac{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{\|Z\|}{Z_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	B
C	$\frac{1}{Z_0}\frac{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{-\|Y\|}{Y_{21}}$	C
D	$\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	D

$|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$; $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$; $\Delta Y = (Y_{11}+Y_0)(Y_{22}+Y_0) - Y_{12}Y_{21}$; $\Delta Z = (Z_{11}+Z_0)(Z_{22}+Z_0) - Z_{12}Z_{21}$; $Y_0 = 1/Z_0$

4. Matrice ABCD de quelques quadripôles de base.

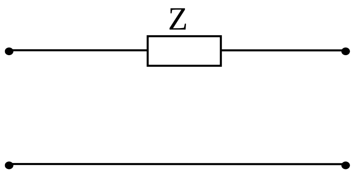
Voici quelques exemples de quadripôles et leur matrice chaine ABCD.

A. Ligne (Z_0 ,ℓ)



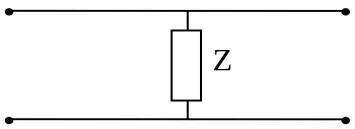
$$[ABCD] = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j\,Z_0 \sin(\beta l) \\ j \sin(\beta l) / Z_0 & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

B. Impédance en série



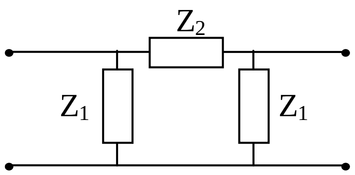
$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C. Impédance en parallèle



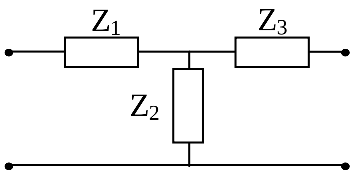
$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}$$

D. Réseau en Pi



$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_1} & Z_2 \\ \frac{2}{Z_1} + \frac{Z_2}{Z_1^2} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}$$

E. Réseau en T



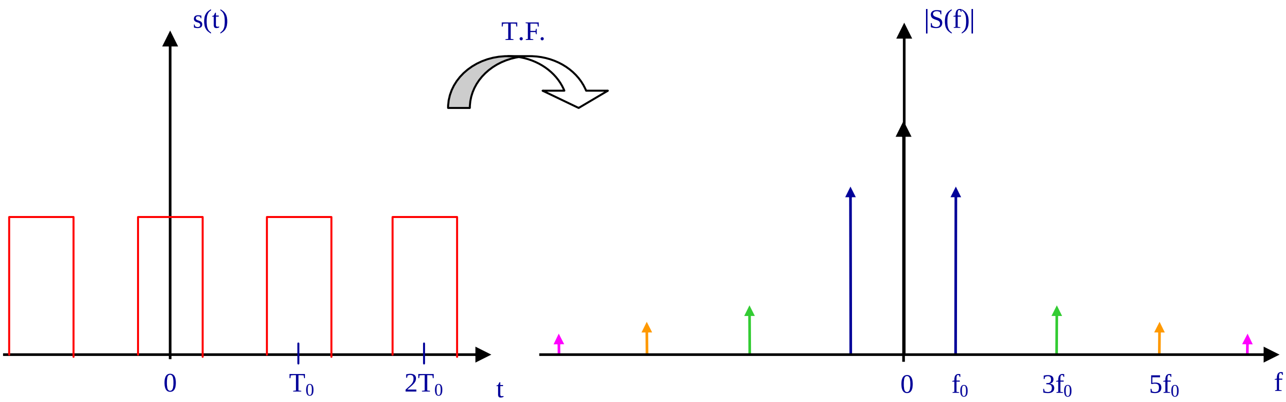
$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} + Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$$

XII. Transmission de l'information sur une ligne

1. Introduction

La connaissance de la vitesse de phase ne renseigne pas sur la vitesse de propagation d'un signal. En effet, la vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation d'une onde monochromatique c'est-à-dire purement sinusoïdale. Or une onde sinusoïdale pure n'a ni début ni fin…alors qu'une information se traduit (au moins) par la variation d'une grandeur telle que l'amplitude (modulation d'amplitude, le signal modulant étant l'information à transmettre), la fréquence (FM) ou la phase de l'onde sinusoïdale. Le contenu spectral d'une onde transportant une information ne peut donc pas être composé d'une seule fréquence.

ex : Une succession d'impulsion carrée (du type de celle que l'on peut rencontrer lors d'une transmission d'information binaire en bande de base) possède un spectre très large.



Vitesse de phase – Dispersion

Soit s(t) un signal connu en z=0 et S(f) sa transformée de Fourrier.

On a : $s(t,z=0)=\int_{-\infty}^{+\infty} S(f,z=0)\, e^{j\omega t}\, df = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega,z=0)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

Chaque composante de fréquence se propage à la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)=\dfrac{\omega}{\beta(\omega)}$. Chaque composante de pulsation ω d'amplitude $S(\omega)$ se propage avec la constante de propagation $\beta(\omega)$ à la vitesse $v_\varphi(\omega)$ et vaut en $z\neq 0$:

$$S(\omega,z)=S(\omega,0)e^{-j\,\beta(\omega)z}=S(\omega,0)e^{-j\frac{\omega}{v_\varphi(\omega)}z}$$

Le signal en z≠0 est la somme de toutes ses composantes : $s(t,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega,0)\, e^{j(\omega t-\beta(\omega)z)}\, d\omega$

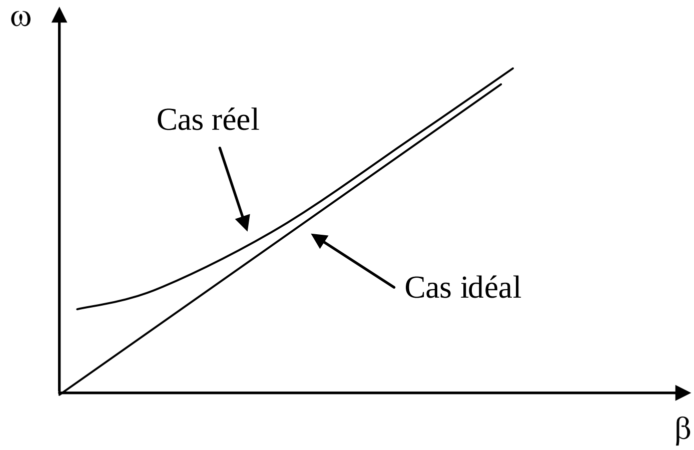
Dans le cas idéal :

v_φ =cste (ne dépend pas de la fréquence) alors la constante de propagation $\beta(\omega)=\frac{\omega}{v_\varphi}$ est une fonction linéaire de ω. Le signal en z vaut alors : $s(t,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega,0)\, e^{j(\omega(t-z/v_\varphi)}\, d\omega$ qui n'est autre que le signal s(t,0) en z=0 retardé de z/v_φ due à la propagation.

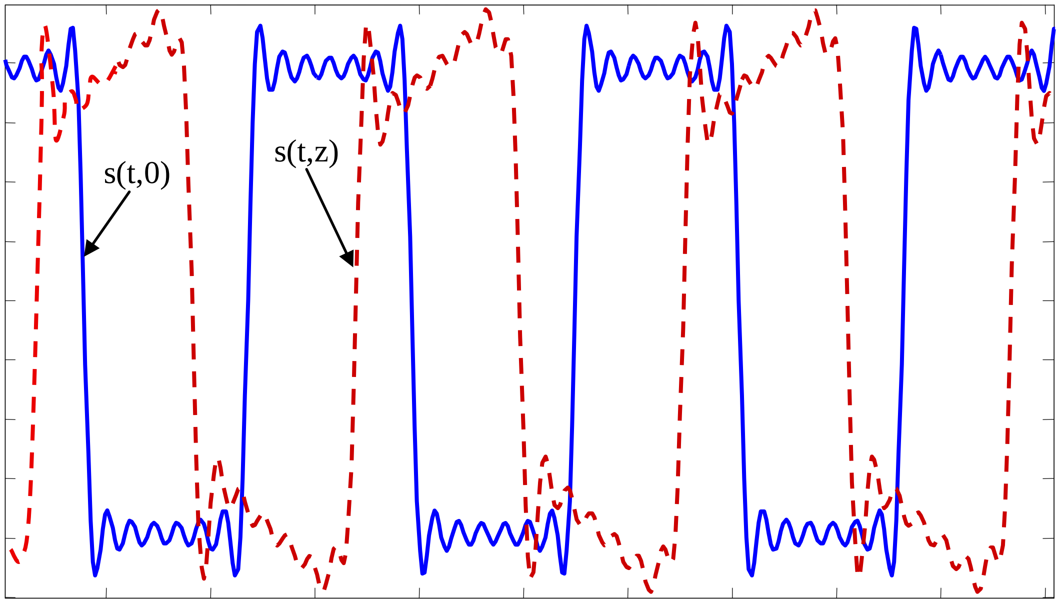
Dans le cas réel :

v_φ = fonction de ω alors β n'est plus une fonction linéaire de ω et le signal s(t,z), égal à la somme des composantes S(ω) retardé chacune de z/v_φ différemment pour chaque fréquence, n'est plus égal au signal initial s(t,0) simplement décalé du temps de propagation mais un signal déformé.

On dit que lorsque v_φ est fonction de ω qu'il y a dispersion. Cette dispersion entraine une déformation du signal lors de sa propagation.



On appelle relation de dispersion la relation qui donne v_φ en fonction de ω.



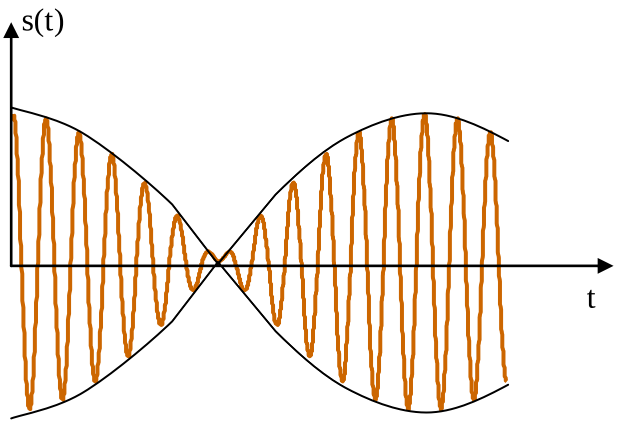
La figure ci-dessus montre un signal s(t) en z =0 (à la sortie du générateur) et en z≠ 0 . Après propagation, on observe une déformation due à la dispersion.

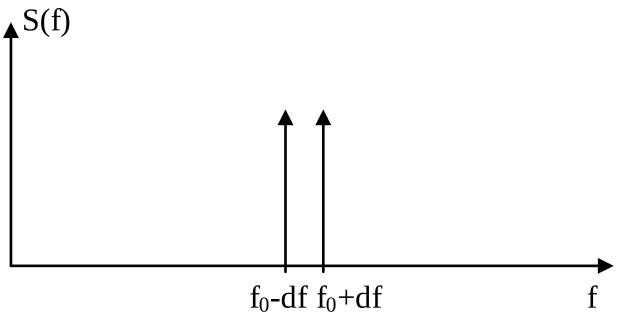
2. Vitesse de groupe

On désire transmettre une information à l'aide d'une onde. Le signal à transmettre est constitué d'une porteuse de pulsation ω_0 modulée en amplitude par l'information à transmettre qui est une sinusoïde de pulsation dω. dω est très petite devant la pulsation de la porteuse de façon à ce que le spectre du signal soit le plus étroit possible.

Le signal s(t) (modulation sans porteuse) s'écrit donc : $s(t) = \cos(d\omega.t)\ \cos(\omega_0 t)$.

Ce signal peut encore s'écrire : $s(t) = \frac{1}{2}\left(\cos(\omega_0 + d\omega)t + \cos(\omega_0 - d\omega)t\right)$ qui est donc simplement la somme de 2 sinusoïdes de fréquence très proches.





Etudions la propagation de ce signal. Pour cela, on pourrait reprendre le calcul fait précédemment pour l'étude de la dispersion et l'appliquer à ce signal simple. On peut aussi, pour traiter le cas simple qui nous intéresse, refaire ce calcul plus directement.

Considérons que les 2 sinusoïdes composant le signal se propagent avec leur vitesse de phase $v_\varphi\big|_{\omega_0+d\omega}$ et $v_\varphi\big|_{\omega_0-d\omega}$, et avec leur constante de propagation $\beta_{(\omega_0-d\omega)}$ et $\beta_{(\omega_0+d\omega)}$. Le signal après propagation sur une distance z devient :

$$s(t,z)=0.5\left(\cos\left[(\omega_0+d\omega)t-\beta_{(\omega_0+d\omega)}z\right]+\cos\left[(\omega_0-d\omega)t-\beta_{(\omega_0-d\omega)}z\right]\right)$$

Comme $d\omega$ est très petit devant ω_0, $\omega_0+d\omega$ et $\omega_0-d\omega$ sont 2 pulsations très proches et on peut écrire d'après Taylor :

$$\beta_{(\omega_0+d\omega)}=\beta_{(\omega_0)}+\frac{d\beta}{d\omega}\bigg|_{\omega_0}\times d\omega \quad \text{et} \quad \beta_{(\omega_0-d\omega)}=\beta_{(\omega_0)}-\frac{d\beta}{d\omega}\bigg|_{\omega_0}\times d\omega$$

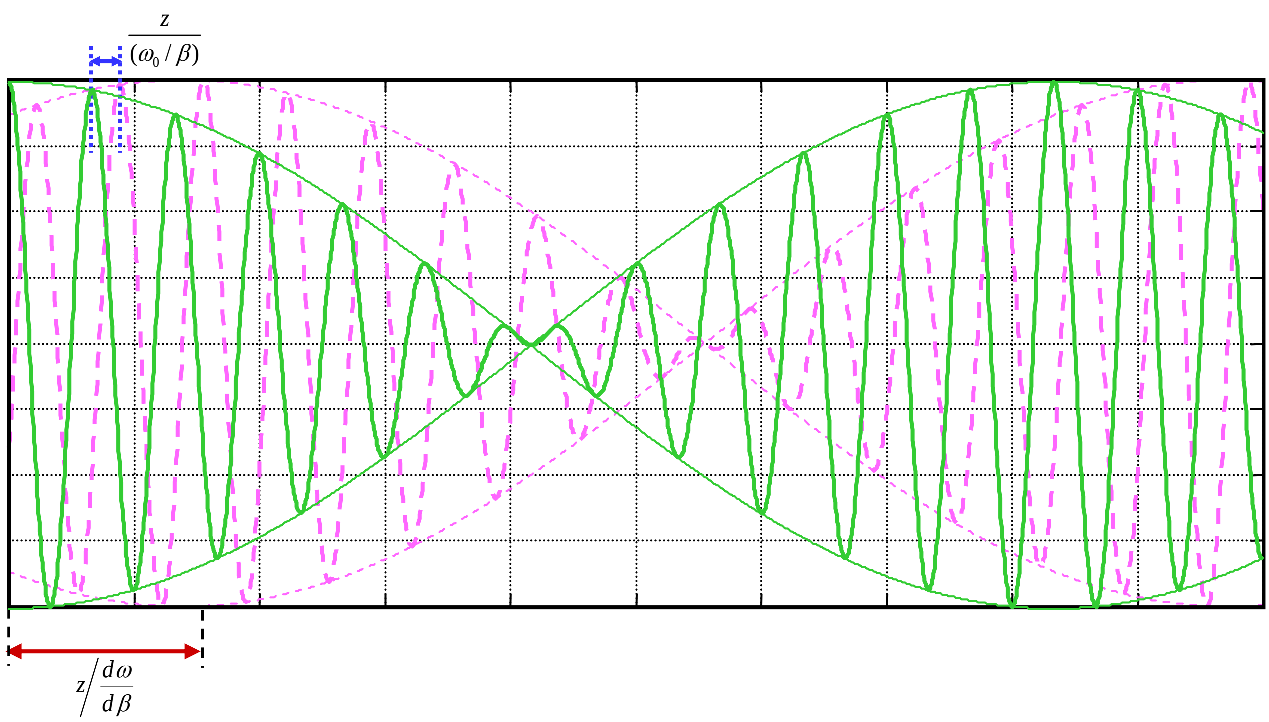
que l'on peut encore noter :

$$\beta_{(\omega_0+d\omega)}=\beta_0+d\beta \quad \text{et} \quad \beta_{(\omega_0-d\omega)}=\beta_0-d\beta$$

On trouve alors que : $s(t,z)=0.5\left(\cos\left[(\omega_0+d\omega)t-\beta_0 z-d\beta z\right]+\cos\left[(\omega_0-d\omega)t-\beta_0 z+d\beta z\right]\right)$

c'est-à-dire : $s(t,z)=\cos\left[d\omega t-d\beta z\right]\,.\,\cos\left[\omega_0 t-\beta_0 z\right]$

Le signal en z est donc le produit de 2 termes ; le 1[er] est l'information à la pulsation $d\omega$ modulant le 2[nd] terme, la porteuse à la pulsation ω_0.



Signaux s(t,0)) et s(t,z) dans le cas d'une ligne dispersive

Sur la figure précédente on voit que la porteuse se propage à la vitesse de phase $\omega_0 / \beta(\omega_0)$ tandis que l'information se propage à la vitesse $d\omega / d\beta$ que l'on appelle vitesse de groupe. Dans le cas que nous venons de traiter, la vitesse de groupe représente la vitesse de propagation de l'information. Cette vitesse peut être très différente de la vitesse de phase de la porteuse.

Plus généralement, on peut considérer que la vitesse de groupe représente la vitesse de transmission de l'information à condition que le signal transportant cette information soit à spectre étroit, comme c'était le cas avec l'exemple précédent.

Dans le cas d'un milieu non dispersif, c'est-à-dire quand la vitesse de phase est constante en fonction de la fréquence on a : $v_\varphi = cste$ donc $\omega = v_\varphi \beta$ et la vitesse de groupe $v_g = d\omega / d\beta = v_\varphi$.→ La vitesse de phase est donc égale à la vitesse de groupe dans le cas des milieux non dispersif.

XIII. LIGNES EN REGIME IMPULSIONNEL

Le régime impulsionnel est traité en séance de Travaux pratique