MSS54

Circuits Passifs en micro-ondes

Thierry Ditchi

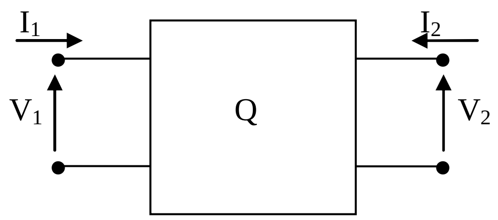
TABLE DES MATIERES

I. MATRICES DE CHAINE ABCD

Les matrices de distribution S et de chaine des ondes C ne sont pas les seules utiles à l'étude des quadripôles. Nous allons présenter dans ce chapitre les matrice de chaine en tension/courant appelées couramment matrices ABCD.

1. Définition

Sur le quadripôle de la figure suivante ont été tracés les tensions et courants sur les 2 accès.



On définit la matrice de chaine ABCD comme suit : $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$

2. Propriétés de la matrice ABCD

A. *La matrice ABCD est chaînable.*

Prenons 2 quadripôles Q1 et Q2 de matrice ABCD respectivement égale à : $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$

Calculons la matrice ABCD des 2 quadripôles montés en série.

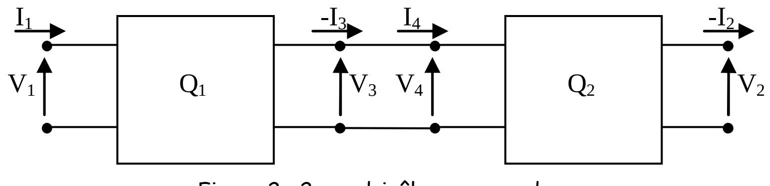


Figure 2 : 2 quadripôles en cascade

On a alors : $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ -I_3 \end{bmatrix}$ (1) et $\begin{bmatrix} V_4 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$ (2)

comme $I_4 = -I_3$ et $V_4 = V_3$ on peut remplacer le vecteur $\begin{bmatrix} V_3 \\ -I_3 \end{bmatrix}$ dans (1) par le vecteur $\begin{bmatrix} V_4 \\ I_4 \end{bmatrix}$ donné par (2).

On a $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$ et donc la matrice ABCD de la cascade des 2 quadripôles est bien le produit des matrice ABCD : $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$

B. *Sens physique des coefficients de la matrice ABCD*

On a les relations suivantes liant les tensions et courants :

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 + B(-I_2) \\ I_1 = CV_2 + D(-I_2) \end{cases}$$

Les coefficients diagonaux 1/A et 1/D sont respectivement le gain en tension lorsque le quadripôle est laissé en circuit ouvert (I_2=0) et le gain en courant lorsque le quadripôle est court-circuité (V_2=0) :

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \quad \text{et} \quad D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$

Les coefficients anti-diagonaux sont respectivement l'impédance de transfert lorsque le quadripôle est court-circuité (V_2=0) et admittance de transfert lorsque Q est laissé en circuit ouvert (I_2=0) :

$$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} \quad \text{et} \quad C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0}$$

C. *Relations avec les paramètres S de la matrice de distribution.*

Les relations liant les paramètres de la matrice S, de la matrice de chaine ABCD et de la matrice de chaine C sont donnés dans le tableau suivant.

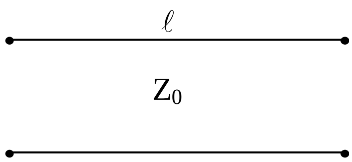
	S	Z	Y	$ABCD$
S_{11}	S_{11}	$\frac{(Z_{11}-Z_0)(Z_{22}+Z_0)-Z_{12}Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{(Y_0-Y_{11})(Y_0+Y_{22})+Y_{12}Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{A+B/Z_0-CZ_0-D}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{12}	S_{12}	$\frac{2Z_{12}Z_0}{\Delta Z}$	$\frac{-2Y_{12}Y_0}{\Delta Y}$	$\frac{2(AD-BC)}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{21}	S_{21}	$\frac{2Z_{21}Z_0}{\Delta Z}$	$\frac{-2Y_{21}Y_0}{\Delta Y}$	$\frac{2}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{22}	S_{22}	$\frac{(Z_{11}+Z_0)(Z_{22}-Z_0)-Z_{12}Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{(Y_0+Y_{11})(Y_0-Y_{22})+Y_{12}Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{-A+B/Z_0-CZ_0+D}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
Z_{11}	$Z_0\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{11}	$\frac{Y_{22}}{\vert Y\vert}$	$\frac{A}{C}$
Z_{12}	$Z_0\frac{2S_{12}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{12}	$\frac{-Y_{12}}{\vert Y\vert}$	$\frac{AD-BC}{C}$
Z_{21}	$Z_0\frac{2S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{21}	$\frac{-Y_{21}}{\vert Y\vert}$	$\frac{1}{C}$
Z_{22}	$Z_0\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{22}	$\frac{Y_{11}}{\vert Y\vert}$	$\frac{D}{C}$
Y_{11}	$Y_0\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{\vert Z\vert}$	Y_{11}	$\frac{D}{B}$
Y_{12}	$Y_0\frac{-2S_{12}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{12}}{\vert Z\vert}$	Y_{12}	$\frac{BC-AD}{B}$
Y_{21}	$Y_0\frac{-2S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{21}}{\vert Z\vert}$	Y_{21}	$\frac{-1}{B}$
Y_{22}	$Y_0\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{\vert Z\vert}$	Y_{22}	$\frac{A}{B}$
A	$\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	A
B	$Z_0\frac{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{\vert Z\vert}{Z_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	B
C	$\frac{1}{Z_0}\frac{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{-\vert Y\vert}{Y_{21}}$	C
D	$\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	D

$|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$; $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$; $\Delta Y = (Y_{11}+Y_0)(Y_{22}+Y_0) - Y_{12}Y_{21}$; $\Delta Z = (Z_{11}+Z_0)(Z_{22}+Z_0) - Z_{12}Z_{21}$; $Y_0 = 1/Z_0$

3. Matrice ABCD de quelques quadripôles de base.

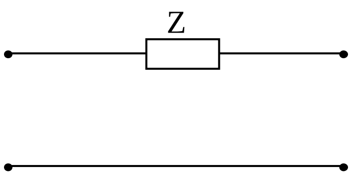
Voici quelques exemples de quadripôles et leur matrice chaine ABCD.

A. Ligne (Z_0,ℓ)



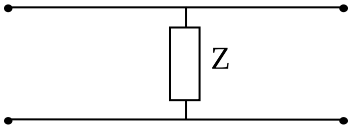
$$[ABCD] = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j\,Z_0 \sin(\beta l) \\ j\sin(\beta l)/Z0 & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

B. Impédance en série



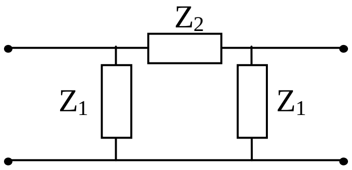
$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C. Impédance en parallèle



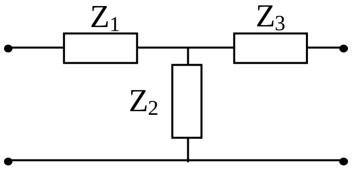
$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}$$

D. Réseau en Pi



$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{Z_2}{Z_1} & Z_2 \\ \dfrac{2}{Z_1}+\dfrac{Z_2}{Z_1^2} & 1+\dfrac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}$$

E. Réseau en T



$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{Z_1}{Z_2} & Z_3+\dfrac{Z_1 Z_3}{Z_2}+Z_1 \\ \dfrac{1}{Z_2} & 1+\dfrac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$$

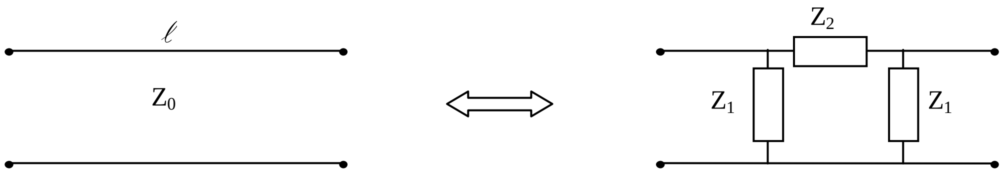
II. SYNTHESE D'IMPEDANCES A L'AIDE DE LIGNES

Nous allons voir comment on peut utiliser des tronçons de ligne pour réaliser des inductances, des condensateurs et des circuits résonnants.

1. Equivalence Tronçon de ligne de longueur quelconque / réseau en Pi ou en Té

A. Réseau en Pi

Soit une ligne d'impédance caractéristique Z_0 de longueur ℓ. Calculons les impédances du réseau en Pi qui a la même réponse que la ligne à la fréquence f_0.



Ecrivons les matrices ABCD des 2 quadripôles,

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j\,Z_0 \sin(\beta l) \\ j\sin(\beta l)/Z0 & \cos(\beta l) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1+\dfrac{Z_2}{Z_1} & Z_2 \\ \dfrac{2}{Z_1}+\dfrac{Z_2}{Z_1^2} & 1+\dfrac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}$$

On cherche à quelles conditions les 2 quadripôles peut être équivalents à la fréquence f_0. On a alors:

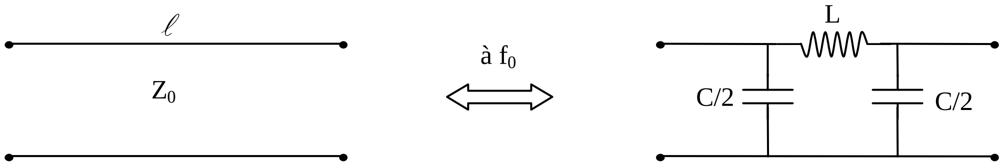
$Z_2 = jZ_0 \sin(\beta_0 l)$ et $1+\dfrac{Z_2}{Z_1} = \cos(\beta_0 l)$ ce qui donne : $Z_1 = j\,Z_0 \dfrac{\sin(\beta_0 l)}{\cos(\beta_0 l)-1}$

On doit vérifier que les 2 autres égalités sont compatibles avec les valeurs de Z_1 et Z_2 trouvées. Pour cela on montre que : $\dfrac{2}{Z_1}+\dfrac{Z_2}{Z_1^2} = j\dfrac{\sin(\beta_0 l)}{Z_0}$.

Z_1 peut s'écrire aussi : $Z_1 = j\,Z_0 \dfrac{\sin(\beta_0 l)}{\cos(\beta_0 l)-1} = j\,Z_0 \dfrac{2\sin(\beta_0 l/2)\ \cos(\beta_0 l/2)}{-2\sin^2(\beta_0 l/2)}$.

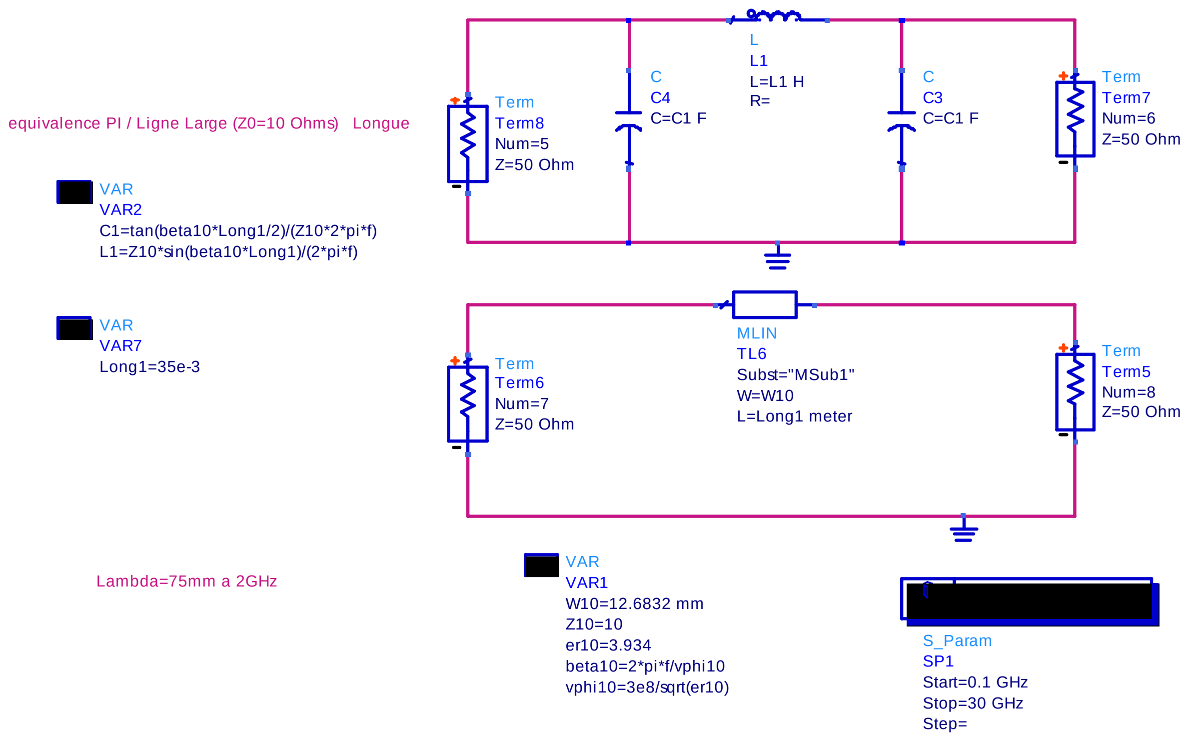
D'où : $Z_2 = jZ_0 \sin(\beta_0 l)$ et $Z_1 = -j\dfrac{Z_0}{tg(\beta_0 l/2)}$

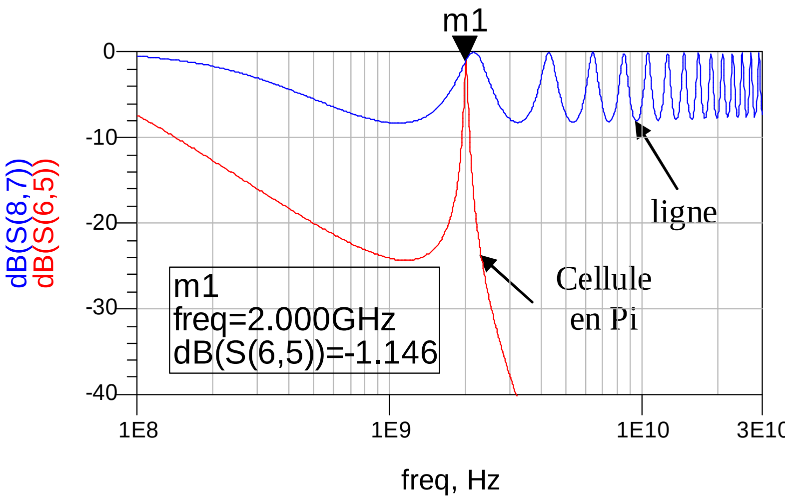
Z_1 est donc équivalente à un condensateur $\boxed{\dfrac{C}{2} = \dfrac{tg(\beta_0 l/2)}{Z_0 \omega_0}}$ et Z_2 à une self $\boxed{L = \dfrac{Z_0 \sin(\beta_0 l)}{\omega_0}}$.



Comme $\beta_0 = \dfrac{\omega_0}{v_\varphi}$ (où v_φ est la vitesse de phase qui dans une ligne bifilaire non dispersive est indépendante de la fréquence), on a en fait $\dfrac{C}{2} = \dfrac{tg(\frac{\omega_0}{v_\varphi} l/2)}{Z_0 \omega_0}$ et $L = \dfrac{Z_0 \sin(\frac{\omega_0}{v_\varphi} l)}{\omega_0}$.

La correspondance entre la ligne et le montage en Pi sera donc exacte à la fréquence de calcul f_0 mais aux autres fréquences, les 2 montages ne seront plus équivalents. On peut voir un exemple ci-dessous.



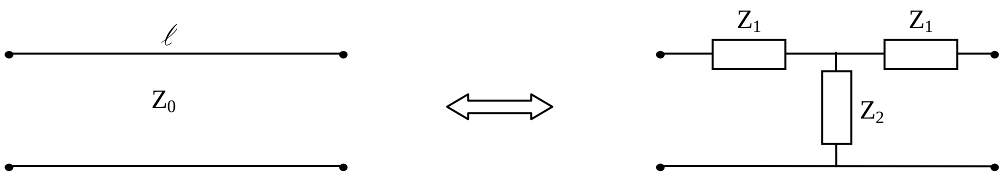


Equivalence entre une ligne 10Ω de 35 mm de longueur et un quadripôle en Pi.

On remarque qu'il n'y a équivalence qu'à la seule fréquence f_0=2GHz.

B. *Réseau en Té*

Soit une ligne d'impédance caractéristique Z_0 de longueur ℓ. Calculons les impédances du réseau en Té qui a la même réponse que la ligne à la fréquence f_0.



Ecrivons les matrices ABCD des 2 quadripôles,

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j\,Z_0 \sin(\beta l) \\ j\sin(\beta l)/Z_0 & \cos(\beta l) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1+\frac{Z_1}{Z_2} & 2Z_1+\frac{Z_1^2}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1+\frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}$$

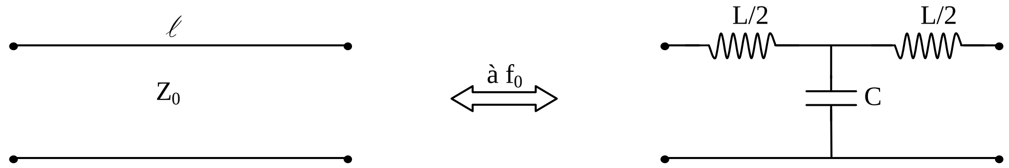
Les 2 matrices doivent être égales à la fréquence f_0. On a alors :

$\frac{1}{Z_2} = j\frac{\sin(\beta_0 l)}{Z_0}$ et $1+\frac{Z_1}{Z2} = \cos(\beta_0 l)$ ce qui donne : $Z_1 = j\,Z_0 tg(\beta_0 l/2)$

On vérifie que $2Z_1 + \frac{Z_1^2}{Z_2} = jZ_0 \sin(\beta_0 l)$.

En bilan on a : $Z_2 = -jZ_0/\sin(\beta_0 l)$ et $Z_1 = j\,Z_0 tg(\beta_0 l/2)$

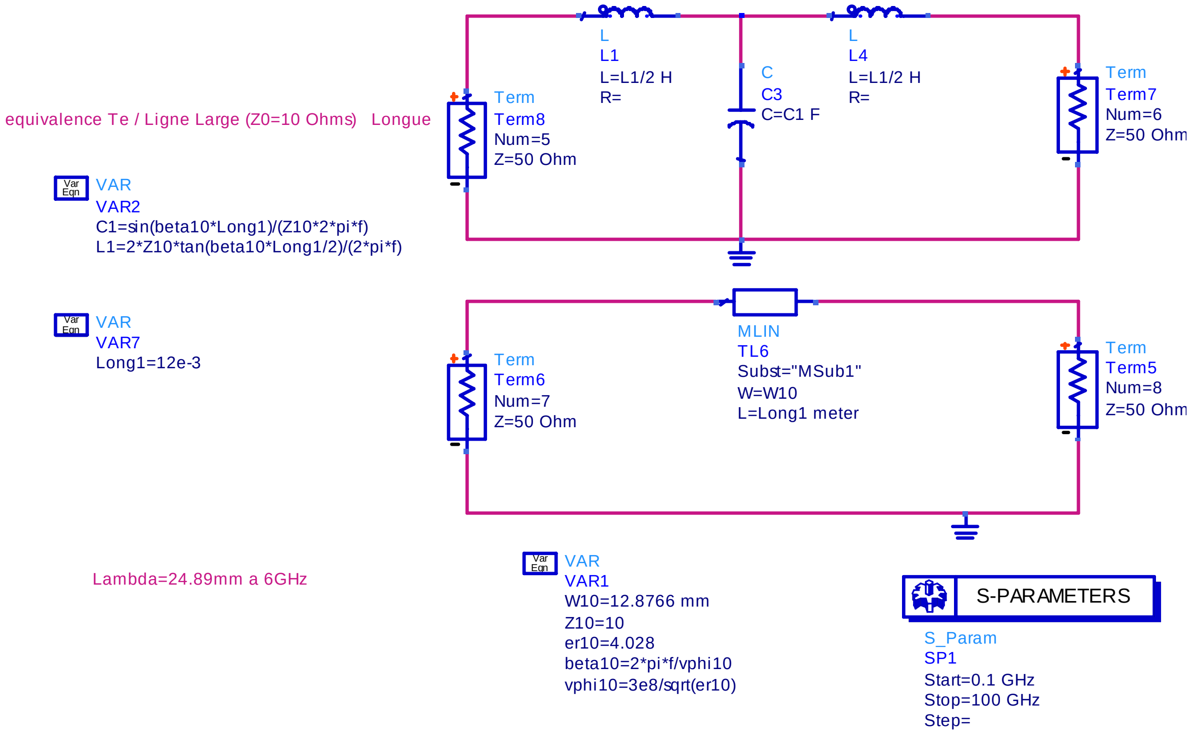
Z_1 est donc nécessairement une self $\boxed{L/2 = \frac{Z_0 tg(\beta_0 l/2)}{\omega_0}}$ et Z_2 un condensateur $\boxed{C = \frac{\sin(\beta_0 l)}{Z_0\,\omega_0}}$.

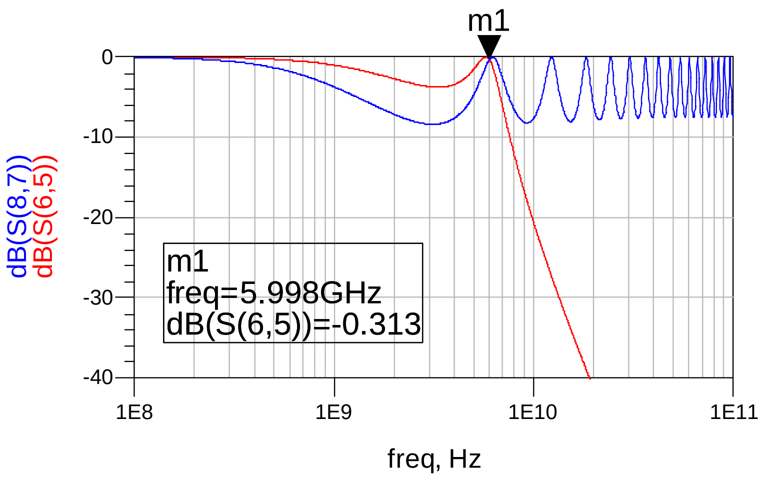


Comme $\beta_0 = \frac{\omega_0}{v_\varphi}$ (où v_φ est indépendante de la fréquence), on a en fait :

$$C = \frac{\sin(\frac{\omega_0}{v_\varphi} l)}{Z_0\,\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{L}{2} = \frac{Z_0 tg(\frac{\omega_0}{v_\varphi} l/2)}{\omega_0} .$$

La correspondance entre la ligne et le montage en Té sera donc exacte à la fréquence de calcul f_0 mais aux autres fréquences, les 2 montages ne seront plus équivalents. On peut voir un exemple ci-dessous.





Equivalence entre une ligne de 10Ω de 12mm de longueur et un quadripôle en Té.

On remarque qu'il n'y a équivalence qu'à la seule fréquence f_0=6GHz.

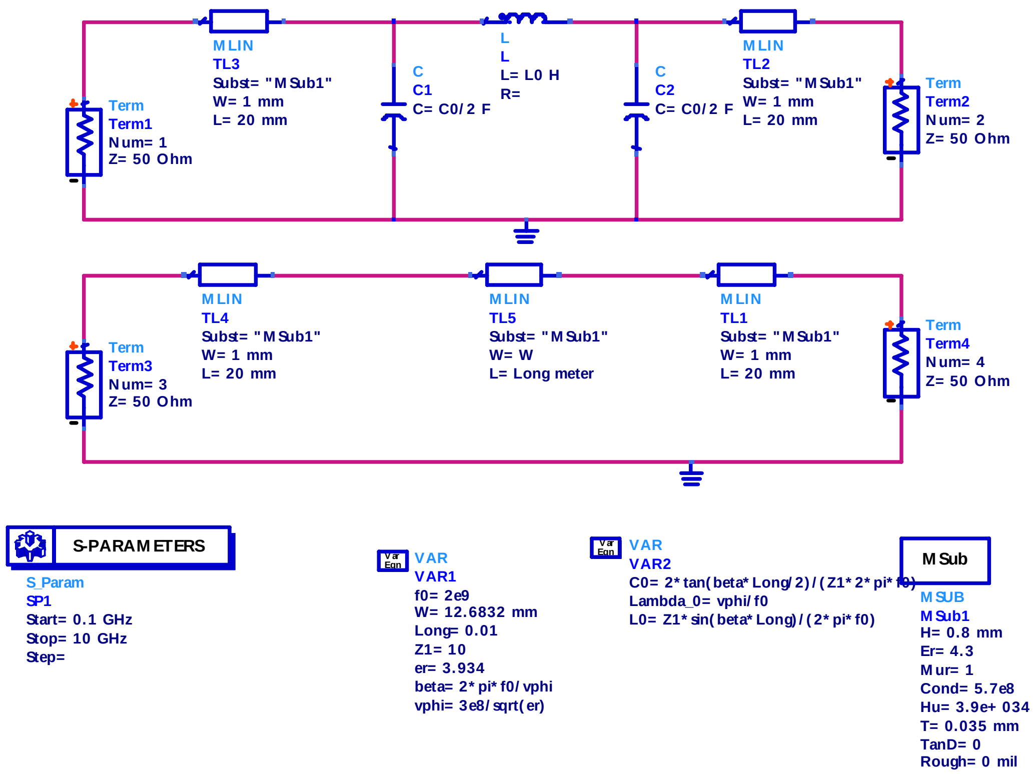
C. A quelle condition un circuit à constante localisée peut il remplacer une ligne dans une bande de fréquence ?

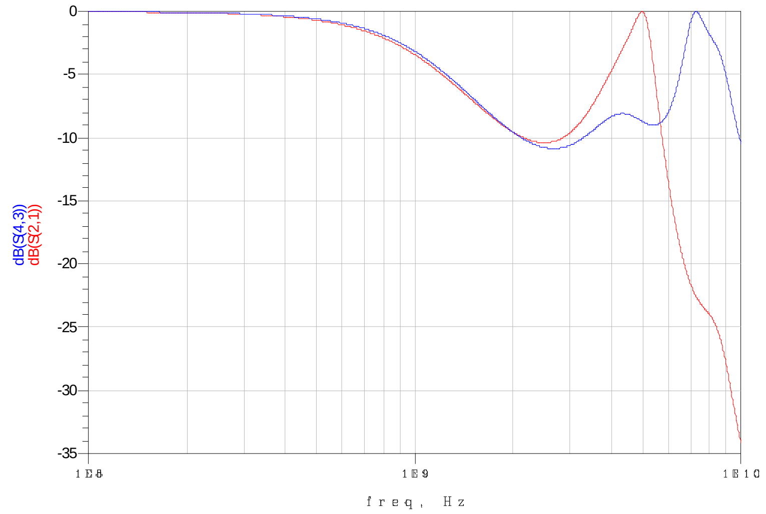
L'équivalence entre un tronçon de ligne et une cellule L-C en Pi ou en Té ne peut rigoureusement être valable qu'à la fréquence à laquelle on calcule C et L. Toutefois, si on se limite à un tronçon de ligne court devant la longueur d'onde ($l << \lambda,\ \forall f \in \text{bande passante}$), alors $\beta l << 1$ et le développement au premier ordre de C et L montre que C et L ne dépendent plus de la fréquence :

$$\frac{C}{2}=\frac{\frac{\omega_0}{v_\varphi}l/2}{Z_0\omega_0}=\frac{l}{2v_\varphi Z_0}\neq fct(f) \text{ et } L=\frac{Z_0\frac{\omega_0}{v_\varphi}l}{\omega_0}=\frac{Z_0\,l}{v_\varphi}\neq fct(f)$$ pour la cellule en Pi et

$$\frac{L}{2}=\frac{Z_0\frac{\omega_0}{v_\varphi}l/2}{\omega_0}=\frac{Z_0 l}{2v_\varphi}\neq fct(f) \text{ et } C=\frac{\frac{\omega_0}{v_\varphi}l}{Z_0\omega_0}=\frac{l}{Z_0 v_\varphi}\neq fct(f)$$ pour la cellule en Té

Dans la figure ci-dessous, le circuit en Pi possède une réponse très proche de celle de la ligne courte pour les fréquences basses pour lesquelles la longueur de la ligne est faible devant la longueur d'onde ($l=4\,mm$ et $\lambda\approx 24\,mm$).

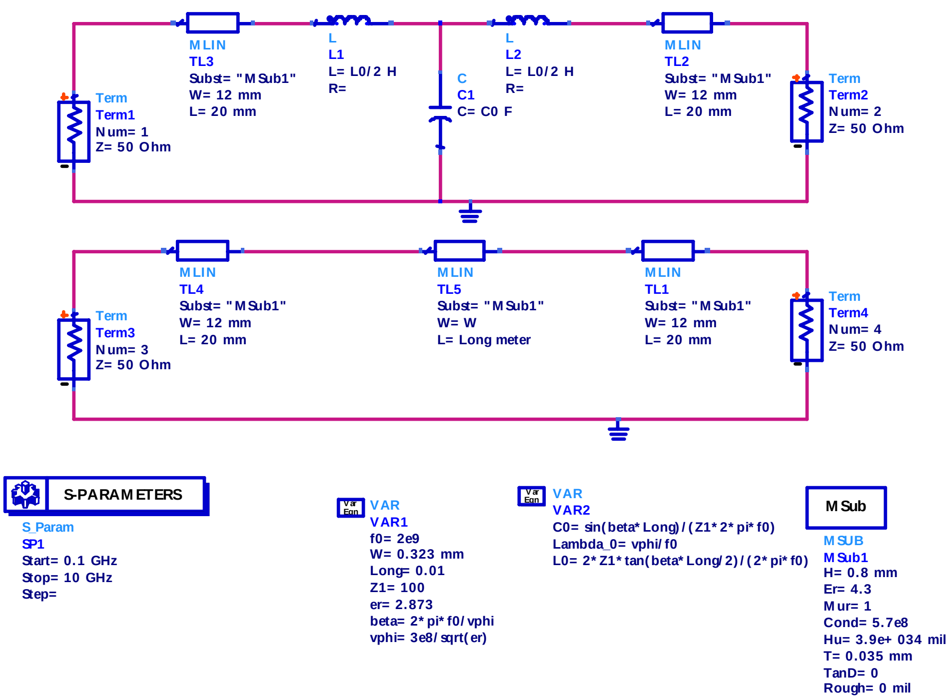


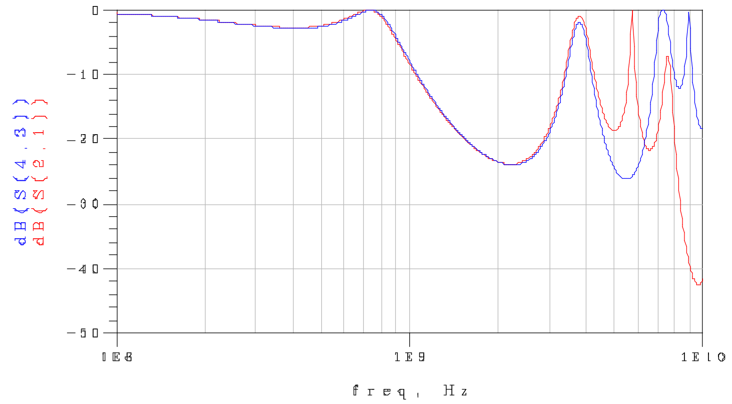


L0	C0	Long	Lambda_0	f0
5.877E-10	7.020E-12	0.010	0.076	2.000E9

Equivalence entre une ligne de longueur l et un circuit LC en Pi.

De même, dans la figure ci-dessous, le circuit en Té possède une réponse très proche de celle de la ligne courte pour les fréquences basses pour lesquelles la longueur de la ligne est faible devant la longueur d'onde ($l = 10\,mm$ et $\lambda \approx 88.5\,mm$).



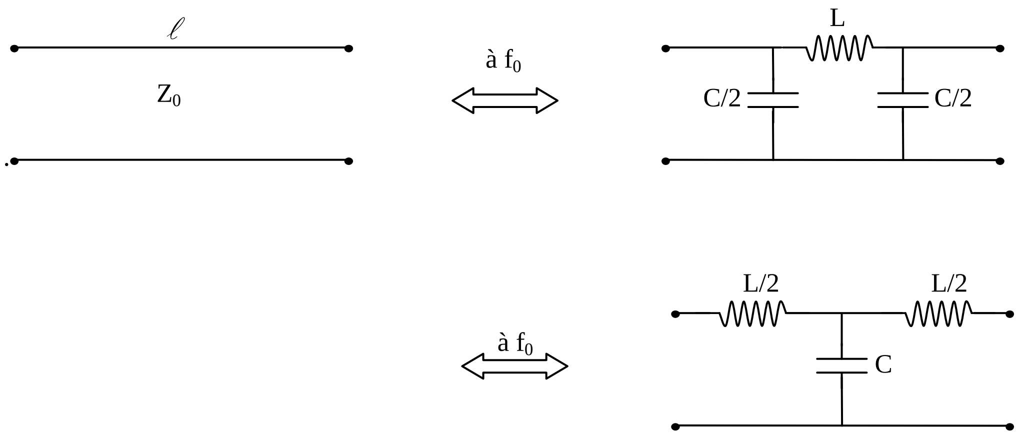


L0	C0	vphi	Long	f0	Lambda_0
5.900E-9	5.187E-13	1.770E8	1.000E-2	2.000E9	8.850E-2

Equivalence entre une ligne courte de longueur l=10mm et un circuit LC en Té .

D. *Bilan*

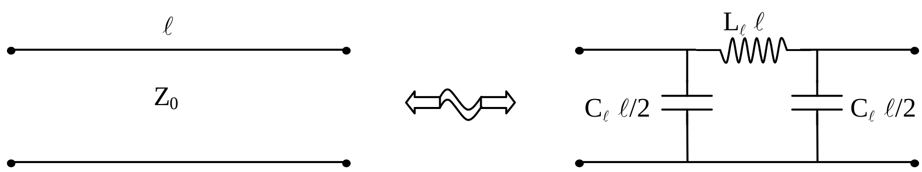
Tant que la ligne possède une longueur $\ell \ll \lambda$, on a finalement :



avec $\boxed{L \approx \dfrac{Z_0 \beta_0 l}{\omega_0}}$ et $\boxed{C \approx \dfrac{\beta_0 l}{Z_0 \omega_0}}$

E. *Autre manière de voir les choses*

Si la ligne est courte ($\ell \ll \lambda$), la tension le long de la ligne est donc uniforme, et on peut directement utiliser le modèle électrique équivalent de la ligne bifilaire.



où L_ℓ et C_ℓ sont dans ce cas les inductances et les capacités linéiques de la ligne.

comme : $v_\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{L_l C_l}}$ et $Z_0 = \sqrt{L_l / C_l}$ et $v_\varphi = \dfrac{\omega_0}{\beta}$

on a : $v_\varphi Z_0 = \dfrac{1}{C_l}$ et $\dfrac{Z_0}{v_\varphi} = L_l$

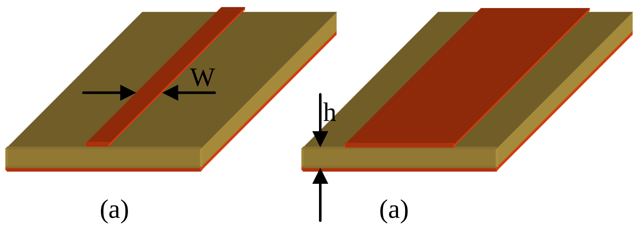
c'est à dire $C = C_l\, l = \dfrac{\beta l}{\omega_0 Z_0}$ et $L = L_l\, l = \dfrac{Z_0 \beta l}{\omega_0}$

résultats identiques à ceux démontrés dans les paragraphes précédents.

2. Réalisation d'inductance séries ou de condensateurs parallèles.

D'après les formules que nous venons de démontrer, on remarque que quand la ligne possède une impédance caractéristique Z_0 élevée, la capacité est donc beaucoup plus petite que l'inductance et dans le cas où Z_0 est faible, c'est l'inductance qui est beaucoup plus élevée que la capacité.

Cela semble évident dans le cas, par exemple, de lignes micro-ruban comme ci contre. Celles-ci sont d'autant plus larges, et donc capacitives, que l'impédance caractéristique est faible, et d'autant plus étroites, et donc inductives, que l'impédance caractéristique est élevée.



Ligne micro-ruban d'impédance caractéristique
(a) élevée (b) faible

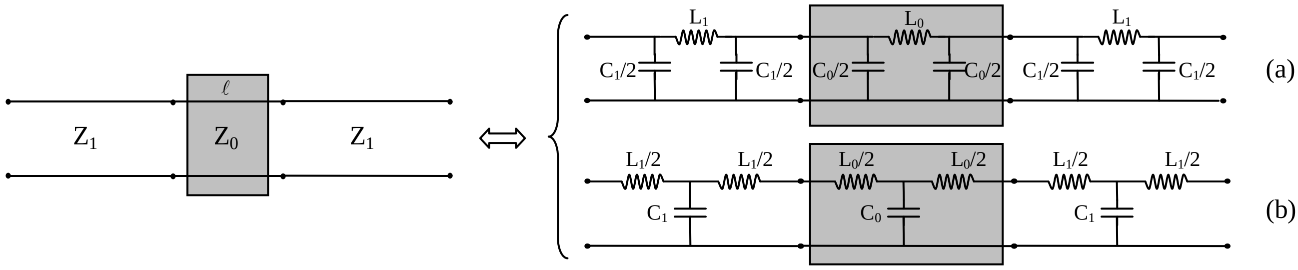
Sur un substrat de FR4 (isolant en verre époxy de 0.8mm d'épaisseur, ε_r=4.3 recouvert de 35μm de cuivre sur 2 faces) telles que celui utilisées dans les simulations des paragraphes précédent, les dimensions des lignes et les valeurs des composants équivalents sont :

Z_0=10 Ω (W=12.68 mm), longueur de ligne = 5 mm : L_2=0.32 nH et C_2=1.68 pF

Z_0=150 Ω (W=0.06 mm), longueur de ligne = 5 mm : L_4=4 nH et C_4=0.091 pF

A. Une ligne courte intercalée dans son environnement

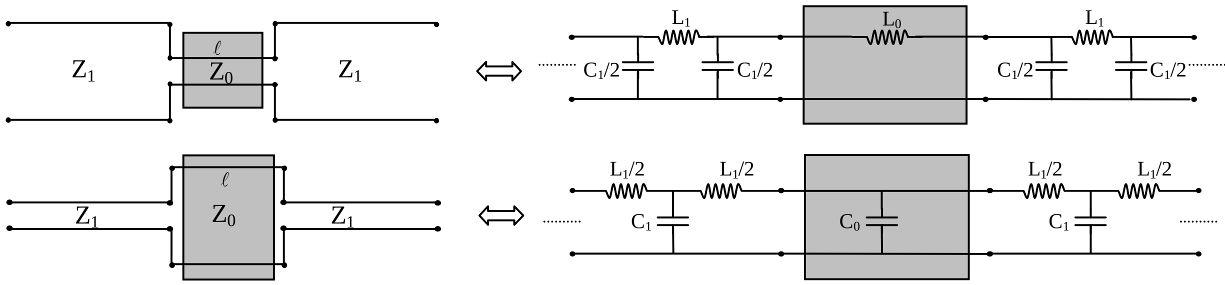
Plaçons une ligne courte d'impédance caractéristique Z_0 entre 2 lignes d'impédances caractéristiques Z_1. On peut remplacer le tronçon court et les lignes qui l'entourent par leur cellule en Pi ou en té équivalentes.



Si $Z_0 \gg Z_1$ alors on comprend sur la figure (a) que les capacités $C_0/2$ sont négligeables devant les capacités $C_1/2$

Si $Z \ll Z_1$ alors on comprend sur la figure (b) que les inductances $L_0/2$ sont négligeables devant les inductances $L_1/2$.

On a alors les schémas équivalents suivants :



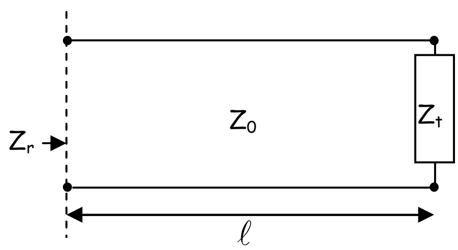
Avec pour C_0 et L_0 les formules suivantes : $\boxed{L_0 = \dfrac{Z_0\beta_0 l}{\omega_0} = \dfrac{Z_0\, l}{v_\varphi}}$ et $\boxed{C_0 = \dfrac{\beta_0 l}{Z_0\,\omega_0} = \dfrac{l}{v_\varphi Z_0}}$

B. Autre manière de voir les choses…

Un tronçon de ligne sans perte d'impédance caractéristique Z_0 de longueur ℓ chargée par Z_t présente à son entrée une impédance équivalente Z_r qui vaut : $z_r = \dfrac{z_t + j\,tg(\beta l)}{1 + j\,z_t\,tg(\beta l)}$ ou encore $Z_r = Z_0 \dfrac{Z_t + j\,Z_0 tg(\beta l)}{Z_0 + j\,Z_t\,tg(\beta l)}$

Si le tronçon de ligne est suffisamment petit devant la longueur d'onde ($l < \lambda/12$ [1] c'est-à-dire $\beta l < \pi/6$), on va pouvoir approximer $tg(\beta l)$ par βl (à 10% près). Dans ces conditions la relation devient :

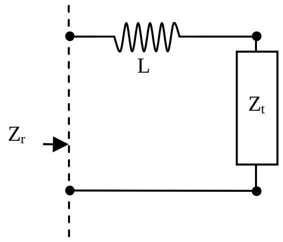
$$Z_r \approx Z_0 \frac{Z_t + j\,Z_0\beta l}{Z_0 + j\,Z_t\beta l}$$



a) Cas d'une ligne courte de grande impédance caractéristique devant la charge.

Si de plus $\underline{Z_t << Z_0}$ (ou même $Z_t = 0$) alors en développant Z_r au 1er ordre en (βl) et $(\frac{Z_t}{Z_0})$, l'impédance ramenée peut s'écrire : $Z_r \approx Z_t + jZ_0\beta l$.

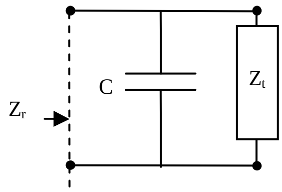
Cette impédance est équivalente à une self en série avec la charge Z_t. Le tronçon de ligne se comporte donc comme une inductance L série dont la valeur vaut : $\boxed{L \approx \frac{Z_0\,\beta l}{\omega} = \frac{Z_0\,l}{v_\varphi}}$



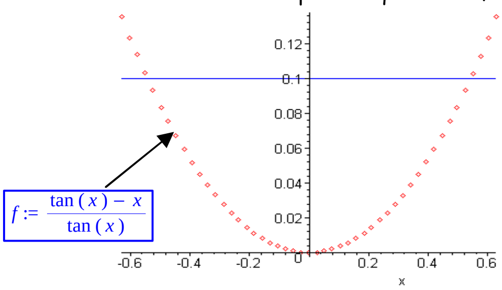
b) Cas d'une ligne courte de faible impédance caractéristique devant la charge.

Si $\underline{Z_t >> Z_0}$ (ou même $Z_t = \infty$) alors au 1er ordre en (βl) et $(\frac{Z_0}{Z_t})$,

l'admittance ramenée peut s'écrire : $Y_r \approx Y_t + j\frac{\beta l}{Z_0}$. Cette admittance est équivalente à une capacité en parallèle avec la charge Z_t. Le tronçon de ligne se comporte donc comme une capacité C parallèle dont la valeur vaut : $\boxed{C \approx \frac{\beta l}{\omega Z_0} = \frac{l}{v_\varphi Z_0}}$



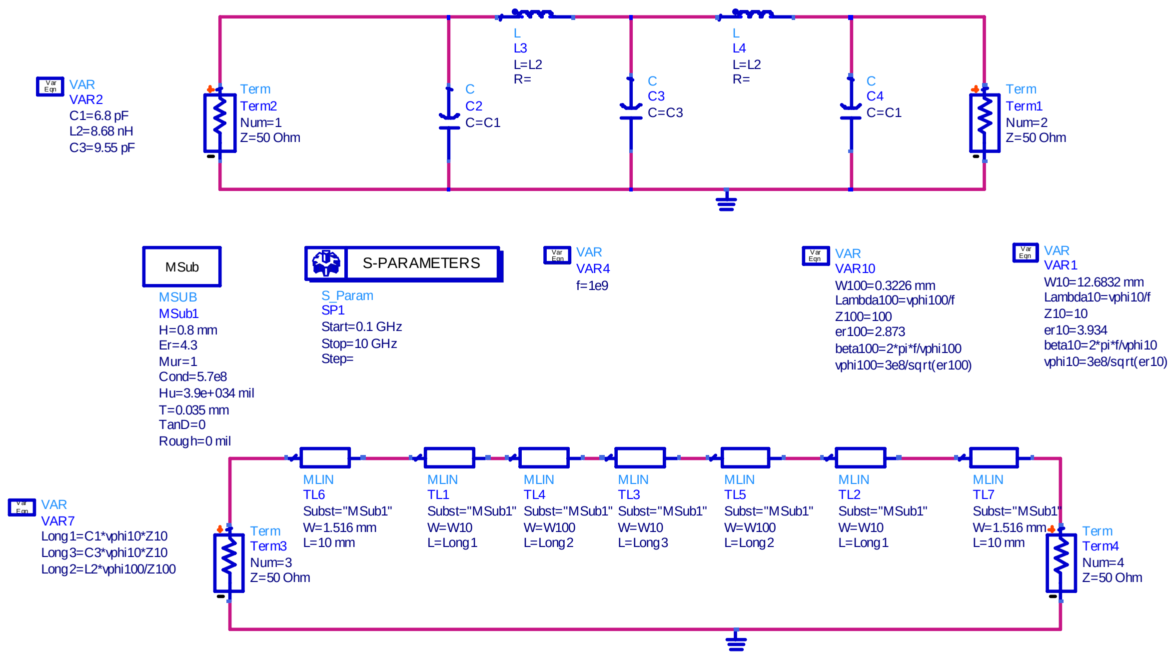
[1] Calculons l'intervalle de valeur pour lesquelles on fait moins de 10% d'erreur en faisant l'approximation. $tg(x) = x$



On voit qu'il suffit que *x* soit plus petit que π /6 cad $\ell<\lambda/12$

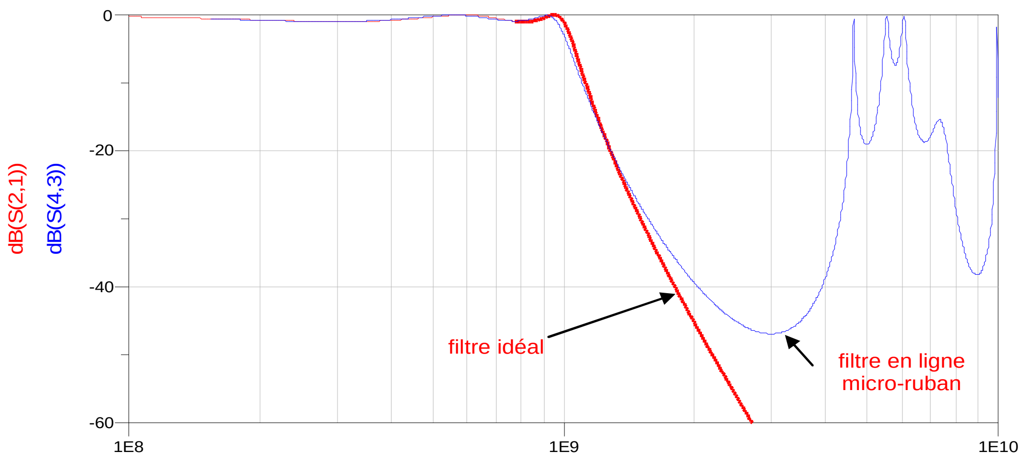
3. Exemple de réalisation

On désire réaliser un filtre passe bas de Chebychev d'ordre 5 d'ondulation 1 dB dans la bande passante [0 ; 1GHz]. La simulation figurée ci-dessous montre que le comportement du filtre réalisé avec des lignes en remplacement des composants est très proche de la réponse idéale.



Design de simulation du filtre idéal (en haut) et en ligne micro-ruban (en bas)

Layout du filtre réalisé en ligne micro-ruban (échelle 1)



Long1	Long2	Long3	Lambda10	Lambda150
0.01029	0.01536	0.01444	0.15125	0.18453

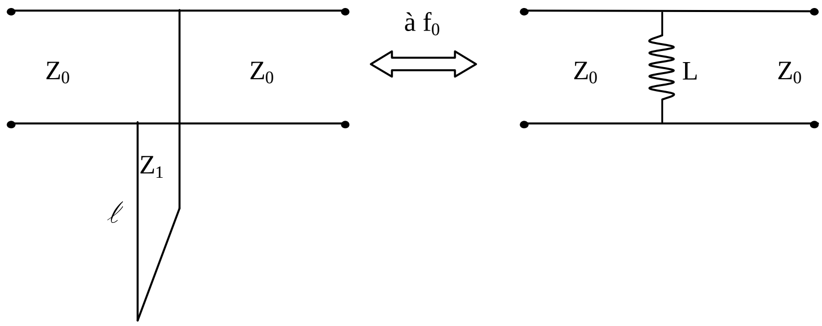
Réponse du filtre idéal et du filtre micro-ruban.

4. Réalisation d'inductances parallèle et de condensateurs série.

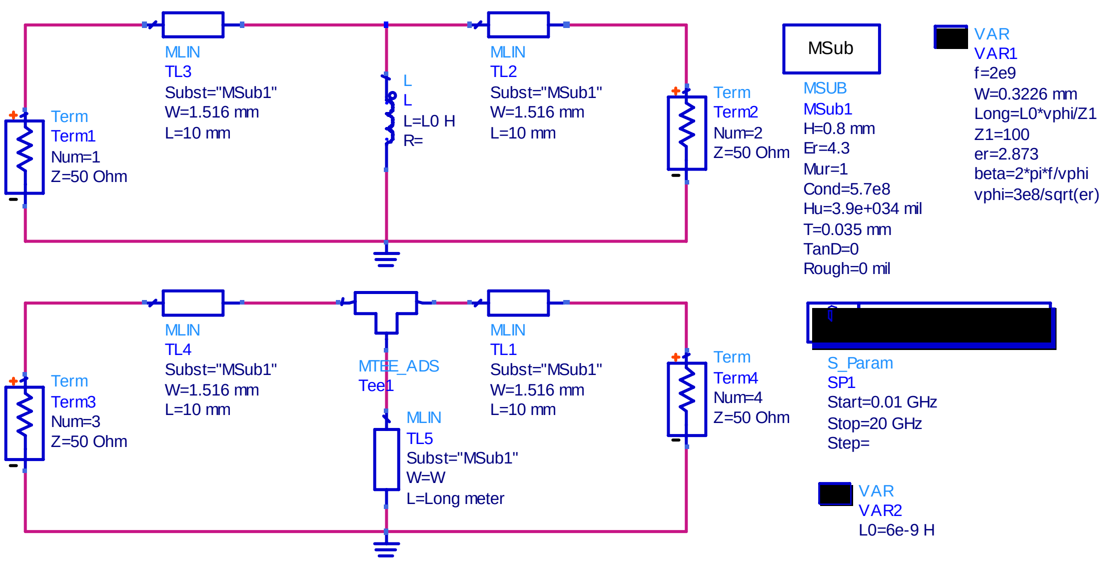
On a vu précédemment comment on pouvait synthétiser un condensateur parallèle ou une inductance série à l'aide de ligne de transmission. Cependant la réalisation de filtres passe haut, passe bande ou coupe bande nécessite d'autres montages comme des inductances parallèles ou des capacités série.

A. Inductance parallèle

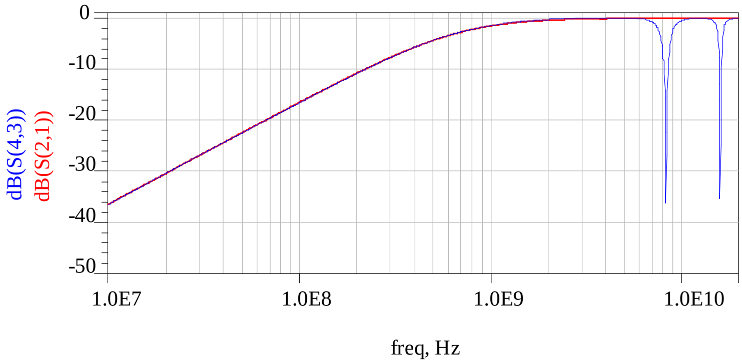
Il est simple de réaliser une inductance parallèle en utilisant la même technique précédemment. La ligne court-circuitée placée en parallèle (stub) ramène une impédance Z_r sur la ligne principale :

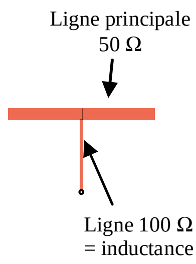


$$Z_r = Z_0 \frac{Z_t + j\,Z_0 tg(\beta\ell)}{Z_0 + j\,Z_t\,tg(\beta\ell)}$$ avec Z_t=0 → $\underline{Z_r = j\,Z_1 tg(\beta\ell)}$ qui est bien inductive tant que la longueur du stub vérifie $tg(\beta\ell)>0$. Cependant cette inductance dépend de la fréquence : $\underline{L = \frac{Z_1\,tg(\beta\ell)}{\omega}}$. Il faut pour que L soit constante que la longueur du stub soit petite devant la longueur d'onde. Pour réaliser des inductances suffisamment grandes il faut alors utiliser un stub d'impédance caractéristique grande. Dans ce cas, l'inductance vaut : $\boxed{L = \frac{Z_1\,\beta\,\ell}{\omega} = \frac{Z_1\,\ell}{v_\varphi}}$. On peut voir ci-dessous un exemple de réalisation d'une telle inductance parallèle en technologie micro-ruban.



Schematic d'une inductance de 6 nH placée en parallèle sur une ligne 50 Ω et d'un stub court d'impédance élevée





Long	Lambda	f0
1.062E-2	8.850E-2	2.000E9

Comparaison entre une inductance et un stub court d'impédance élevé (L= 6 nH placée en parallèle sur une ligne 50 Ω (échelle 1)

B. Condensateur série

La synthèse de condensateurs série est plus problématique. Une ligne d'impédance caractéristique faible correspond automatiquement à un condensateur parallèle.

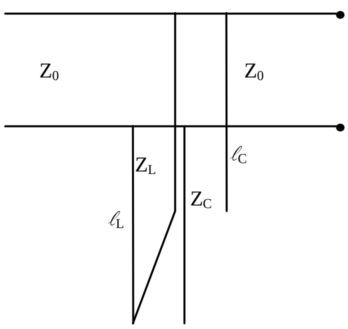
On verra plus loin des techniques de synthèse permettant la fabrication de condensateur série.

5. Réalisation de circuits résonnants.

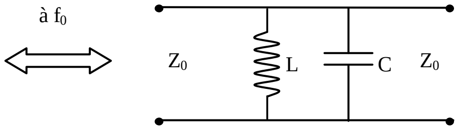
On peut utiliser les techniques vues plus haut pour synthétiser des circuits résonnants. Du fait de la difficulté de réaliser des condensateurs série en ligne on se limitera dans un premier temps à la synthèse de circuits résonnants placés en parallèle.

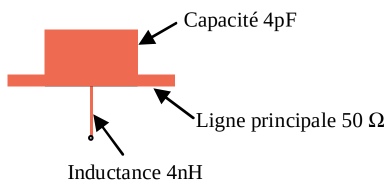
A. L -C parallèle en parallèle

Un résonateur LC parallèle placé en dérivation sur une ligne peut être réalisé en utilisant les résultats des paragraphes précédents. On peut mettre en parallèle une ligne de grande impédance caractéristique (Z_L= 100 Ω dans l'exemple ci-dessous) terminée par un court-circuit, placé en parallèle avec une ligne de faible impédance caractéristique (Z_C= 10 Ω dans l'exemple ci-dessous) laissée en circuit ouvert.



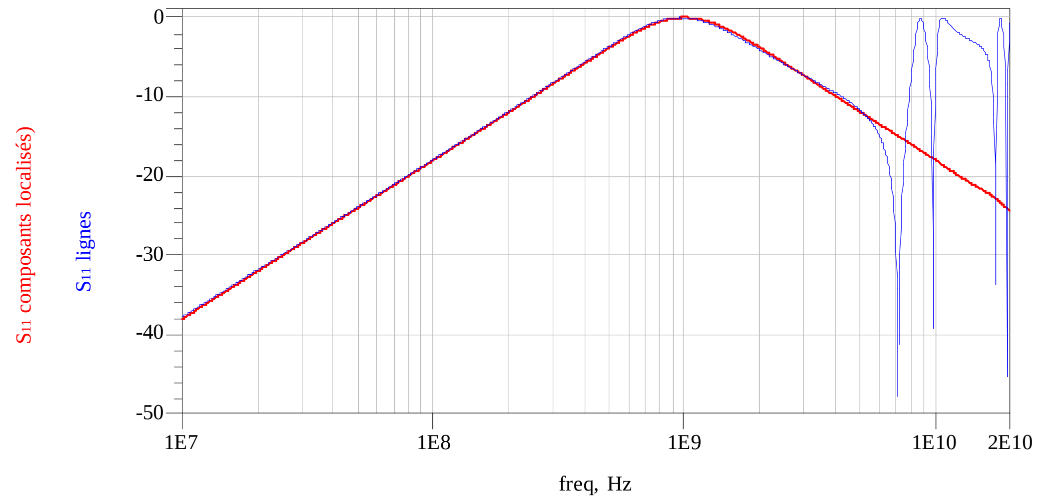
à f_0





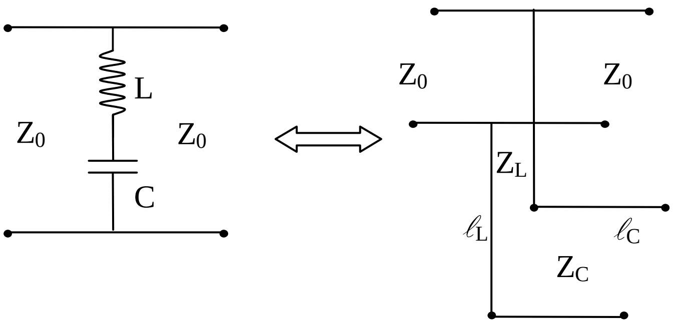
C	L	ℓ_C	ℓ_L	Z_C	Z_L
5 pF	5 nH	7.6 mm	8.8 mm	10 Ω	100 Ω

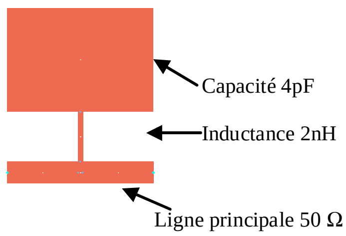
C	L	ℓ_C	ℓ_L	Z_C	Z_L
5 pF	5 nH	7.6 mm	8.8 mm	10 Ω	100 Ω



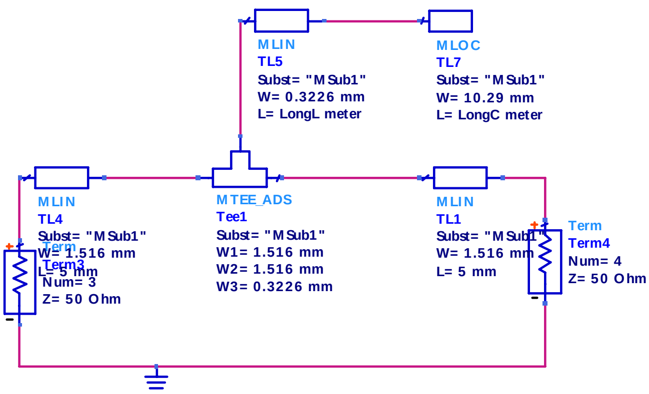
B. L -C série en parallèle

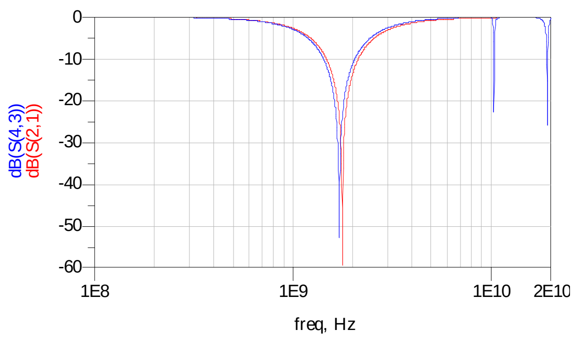
Un résonateur LC série placé en dérivation sur une ligne peut être réalisé grâce à la mise en série d'une une ligne de forte impédance caractéristique (Z_L= 100 Ω dans l'exemple ci-dessous) chargée par une ligne de faible impédance caractéristique (Z_C= 10 Ω dans l'exemple ci-dessous) terminée par un circuit ouvert.





C	L	ℓ_C	ℓ_L	Z_C	Z_L
4 pF	2 nH	7.2 mm	3.54 mm	12 Ω	100 Ω



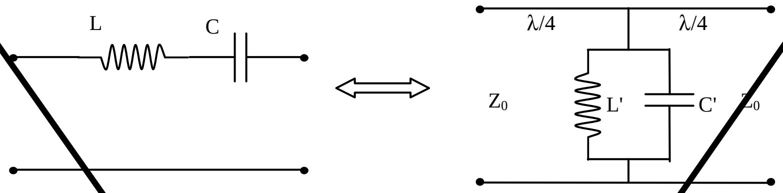


C. L -C série montés en série

On a vu qu'il n'était pas possible de réaliser une capacité série à l'aide d'une ligne. On va voir qu'il est possible de les réaliser à partir de résonateur parallèle et de transformateurs quart d'onde.

a) L -C série

Cherchons à quelle condition les 2 circuits ci-dessous sont équivalents.



On écrit les matrices ABCD des 2 dispositifs et on les identifie à la fréquence de travail f_0 :

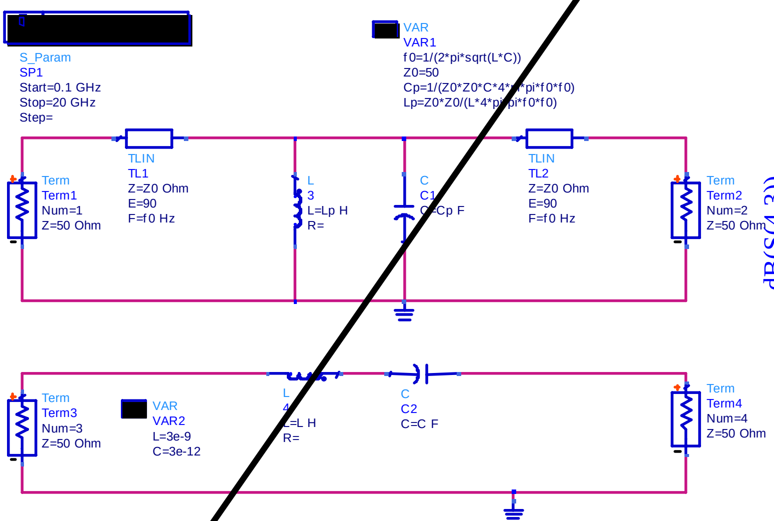
$$\underset{[Z = LC\,série]}{\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{[ligne\,\lambda/4]}{\begin{bmatrix} 0 & jZ_0 \\ j/Z_0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{[Z' = L'C'/\!/]}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z' & 1 \end{bmatrix}} \underset{[ligne\,\lambda/4]}{\begin{bmatrix} 0 & jZ_0 \\ j/Z_0 & 0 \end{bmatrix}}$$

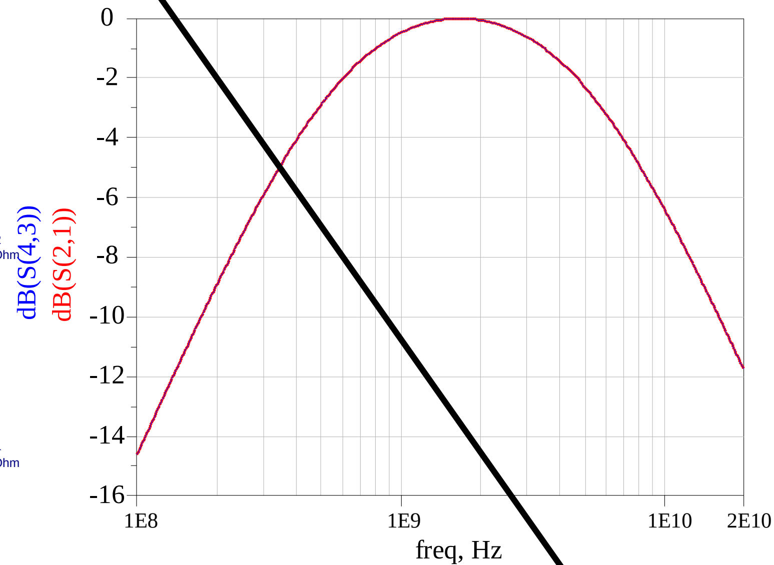
Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\dfrac{Z_0^2}{Z'} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

D'où : $-Z_0^2\, j(C'\omega_0 - \dfrac{1}{L'\omega_0}) = j(L\omega_0 - \dfrac{1}{C\omega_0})$ c'est-à-dire $\boxed{C' = \dfrac{1}{Z_0^2\, C\, \omega_0^2}}$ et $\boxed{L' = \dfrac{Z_0^2}{L\, \omega_0^2}}$

Le circuit de gauche déphase en plus de π à cause des 2 lignes quart-d'onde en série.

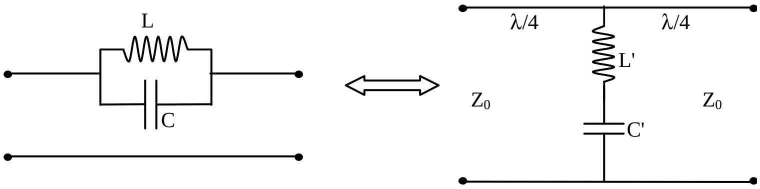




f0	C	L	Cp	Lp
1.678E9	3.000E-12	3.000E-9	1.200E-12	7.500E-9

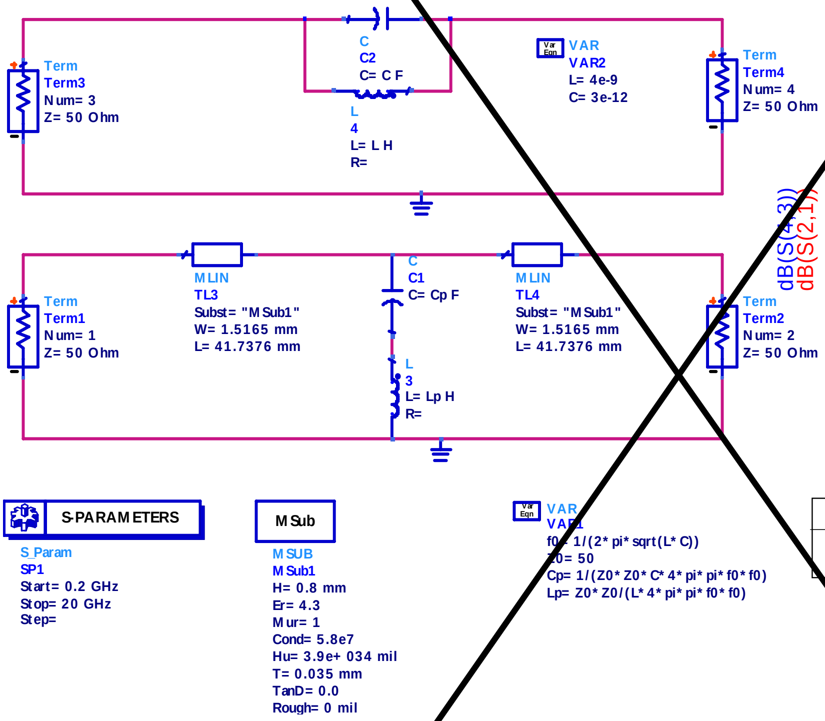
D. L -C parallèle montés en série

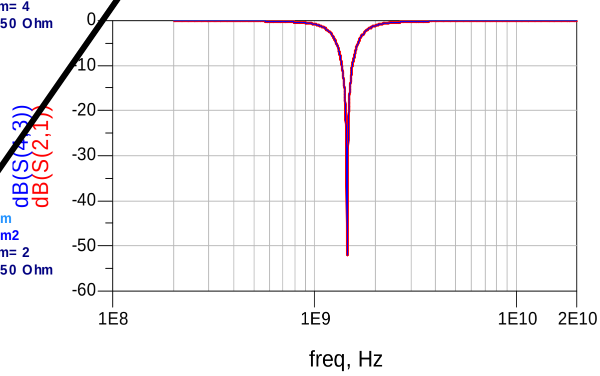
Cherchons à quelle condition les 2 circuits ci-dessous sont équivalents.



De la même manière, on montre qu'alors L' et C' doivent prendre les mêmes valeurs que dans le paragraphe précédent pour que le montage de gauche soit équivalent à celui de droite, c'est-à-dire :

$$\boxed{C' = \frac{1}{Z_0^2\, C\, \omega_0^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{L' = \frac{Z_0^2}{L\, \omega_0^2}}$$

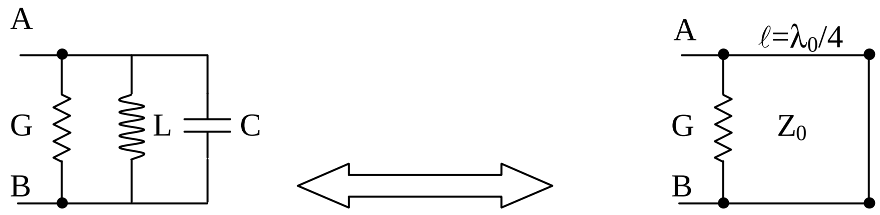




L	C	f0
4.000E-9	3.000E-12	1.453E9

E. Résonateur LC parallèle ←→ ligne λ/4 court-circuitée

On montre qu'on peut remplacer un circuit résonnant LC parallèle par une ligne court-circuitée de longueur λ/4



on a :

$$Y_{AB} = G + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$$

$$Y_{AB} = G\left[1 + j\frac{C\omega}{G}(1 - \frac{1}{LC\omega^2})\right]$$

$$Y_{AB} = G\left[1 + j\frac{C(\omega_0 + \Delta\omega)}{G}(1 - \frac{1}{LC(\omega_0 + \Delta\omega)^2})\right]$$

$$Y_{AB} = G\left[1 + j\frac{C\omega_0}{G}\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)(1 - \frac{1}{LC\omega_0\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2})\right]$$

le coefficient de qualité Q vaut : $Q = \frac{C\omega_0}{G}$ où $LC\omega_0^2 = 1$

$$Y_{AB} = G\left[1 + jQ\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2})\right]$$

On fait un développement limité en supposant $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} << 1$

et on trouve $Y_{AB} \cong G\left[1 + jQ\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right]$

$$Y_{AB} = G + Y_{CD}$$

$$Z_{CD} = j\,Z_0\,tg(\beta l) = j\,Z_0\,tg(\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{v_\varphi}l)$$

or $l = \frac{\lambda_0}{4} = \frac{\pi\, v_\varphi}{2\,\omega_0}$

donc

$$Z_{CD} = j\,Z_0\,tg(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\omega}{v_\varphi}l) = -jZ_0\,cotg(\frac{\Delta\omega}{v_\varphi}l)$$

c'est à dire $Y_{CD} = jY_0\,tg(\frac{\Delta\omega}{v_\varphi}l)$

or si $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} << 1$ on a $\frac{\Delta\omega}{v_\varphi}l = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\frac{\pi}{2} << 1$

le développement au 1er ordre donne :

$Y_{CD} \cong jY_0\frac{\Delta\omega}{v_\varphi}l$ cad

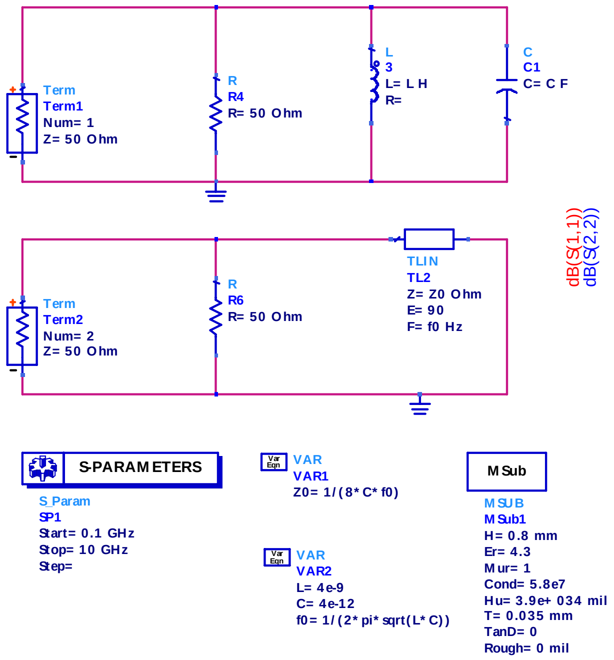
c'est-à-dire $Y_{CD} \cong G + jY_0\frac{\Delta\omega l}{v_\varphi}$

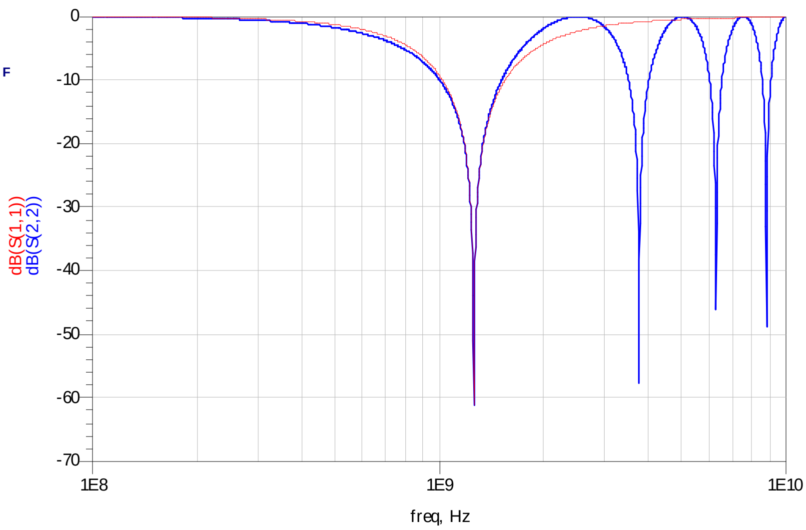
En identifiant les 2 expressions on a :

$$GQ\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = Y_0\frac{\Delta\omega l}{v_\varphi} \quad \text{c'est-à-dire} \quad GQ\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = Y_0\frac{\Delta\omega\,\pi}{2\omega_0}$$

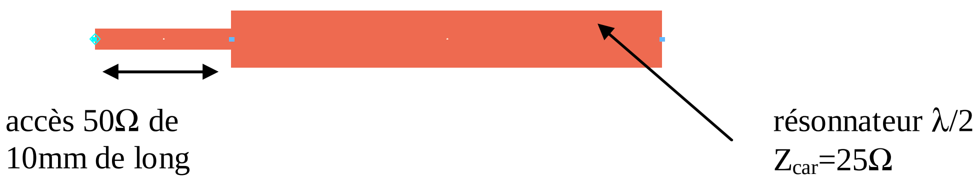
d'où $Y_0 = 8Cf_0$ ou encore $\boxed{Z_0 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

Le calcul précédent a été fait au 1[er] ordre autour de ω_0. La simulation suivante sous le logiciel ADS nous permet de vérifier sa validité et de déterminer la bande de fréquence dans laquelle cette équivalence reste valable.



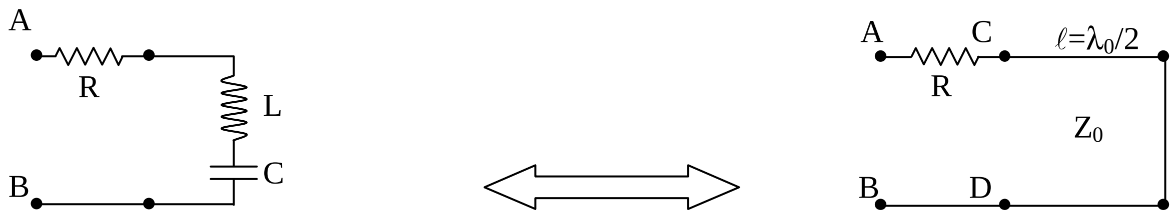


freq	f0	L	Z0	C
1.000E8Hz	1.258E9	4.000E-9	2.484E1	4.000E-12



F. Résonateur LC série ←→ ligne λ/2 court-circuité

On montre qu'on peut remplacer un circuit résonnant LC série par une ligne court-circuitée de longueur $\lambda/2$.



on a :

$$Z_{AB} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

$$Z_{AB} = R\left[1 + j\frac{L\omega}{R}(1 - \frac{1}{LC\omega^2})\right]$$

$$Z_{AB} = R\left[1 + j\frac{L(\omega_0 + \Delta\omega)}{R}(1 - \frac{1}{LC(\omega_0 + \Delta\omega)^2})\right]$$

$$Z_{AB} = R\left[1 + j\frac{L\omega_0}{R}\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\left(1 - \frac{1}{LC\omega_0^2\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)\right]$$

le coefficient de qualité Q vaut : $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ où $LC\omega_0^2 = 1$

$$Z_{AB} = R\left[1 + jQ\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)\right]$$

On fait un développement limité en supposant $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} << 1$

$$Z_{AB} \cong R\left[1 + jQ\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\left(2\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right]$$

cad $Z_{AB} \cong R\left[1 + jQ\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right]$

$$Z_{AB} = R + Z_{CD}$$

$$Z_{CD} = j\,Z_0\,tg(\beta l) = j\,Z_0\,tg(\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{v_\varphi}l)$$

or $l = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\pi v_\varphi}{\omega_0}$

donc

$$Z_{CD} = j\,Z_0\,tg(\pi + \frac{\Delta\omega}{v_\varphi}l) = jZ_0\,tg(\frac{\Delta\omega}{v_\varphi}l)$$

or si $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} << 1$ on a $\frac{\Delta\omega}{v_\varphi}l = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\pi << 1$

le développement au 1er ordre donne :

$$Z_{CD} \cong jZ_0\frac{\Delta\omega}{v_\varphi}l$$

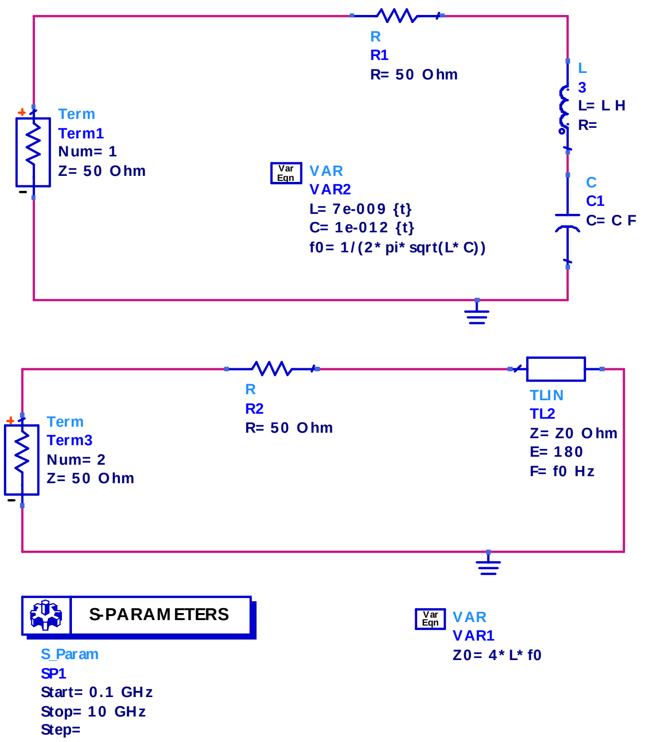
c'est-à-dire $Z_{CD} \cong jZ_0\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\pi$

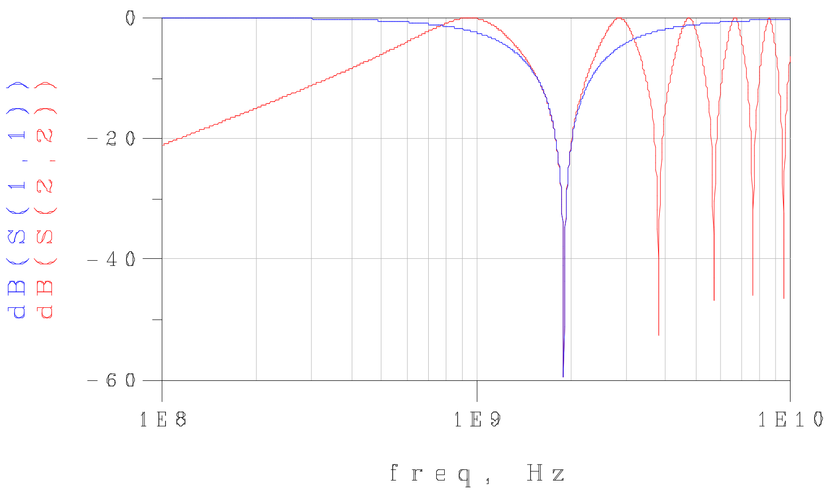
donc $Z_{AB} \cong R + jZ_0\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\pi$

En identifiant les 2 expressions on a :

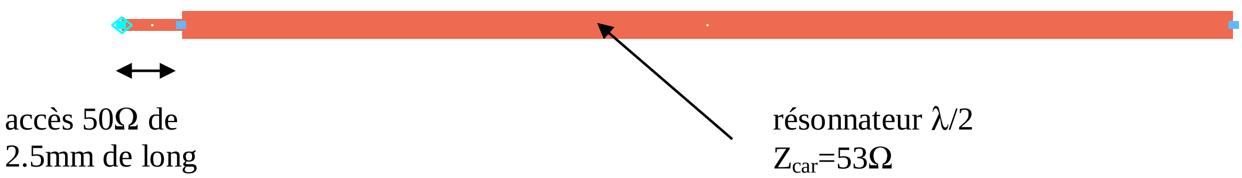
$$RQ\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = Z_0\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\pi \quad \text{cad} \quad Z_0 = \frac{2RQ}{\pi} \quad \text{ou encore} \quad Z_0 = 4L\,f_0 \quad \text{ou enfin} \quad \boxed{Z_0 = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Le calcul précédent a été fait au 1er ordre autour de ω_0. La simulation suivante sous le logiciel ADS nous permet de vérifier sa validité et de déterminer la bande de fréquence dans laquelle cette équivalence reste valable.





C	f0	L	Z0
1.000E-12	1.902E9	7.000E-9	53.3Ω



Cependant l'équivalence est moins bonne que dans le cas d'un circuit résonnant parallèle.

III. SYNTHESE D'IMPEDANCES A L'AIDE D'ELEMENTS LOCALISES

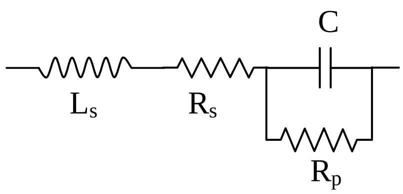
Dans le but de réduire les dimensions des circuits, on synthétise des composants à l'aide de structures très petites devant la longueur d'onde pour limiter les effets de propagation. Certaine de ces technologies sont utilisables pour des circuit hybrides (sur circuits imprimés) alors que d'autres ne sont possibles que dans le cadre de circuit intégrés. Les formules donnés plus loin dans ce polycopié sont empiriques, établis parfois à partir de formules théorique adaptées pour "coller" aux mesures expérimentales ou parfois purement empiriques.

(On trouve dans la littérature de nombreuses formules qui parfois donnent des résultats contradictoires.)

1. Condensateurs

On a vu qu'il était impossible de réaliser un condensateur série directement à partir d'une ligne large.

A. Chip



où L_s est l'inductance et R_s est la résistance de connexion, R_p la résistance de fuite.

B. Gap

C. Inter digité

D. MIM (technologie intégrée)

2. Inductances

A. Chip

B. Boucles

C. spirales

D. Chip

3. Résistances

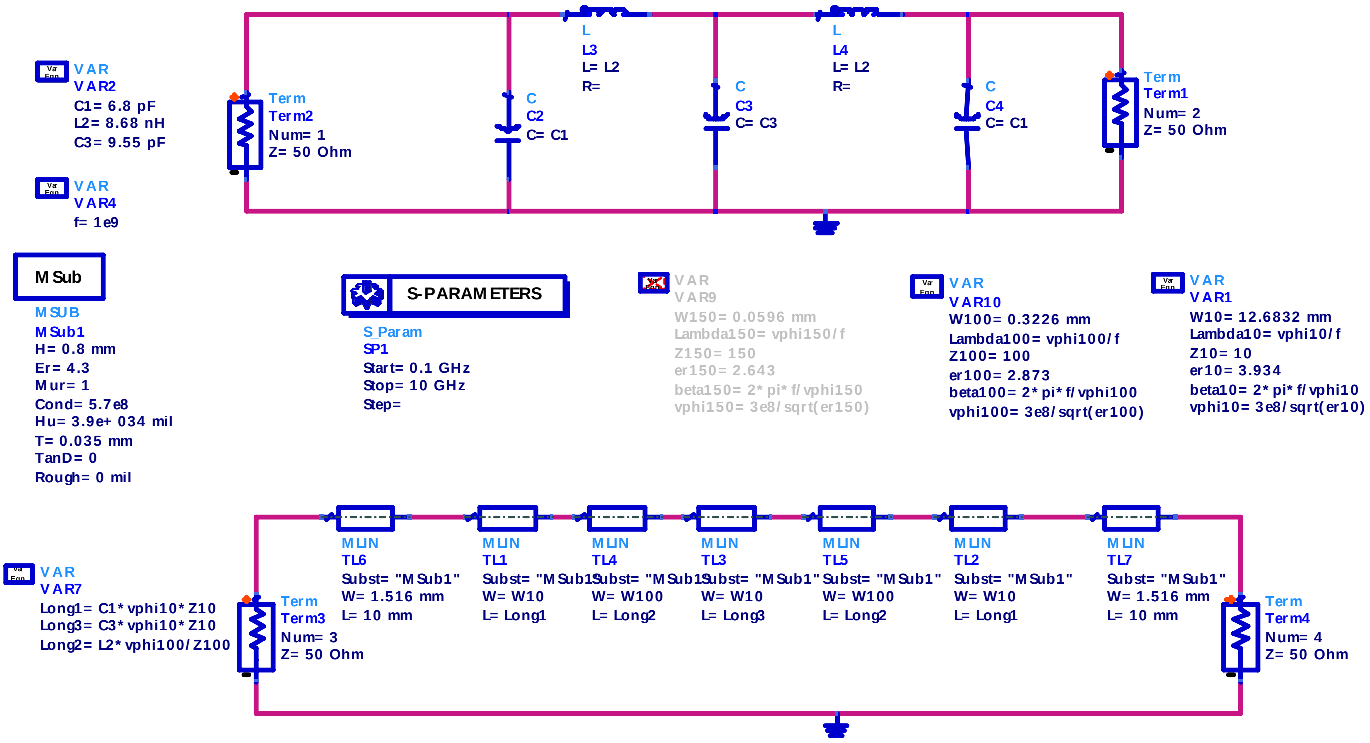
A. Chip

B. ruban (technologie intégrée)

IV. EXEMPLES DE REALISATION DE FILTRES A LIGNES

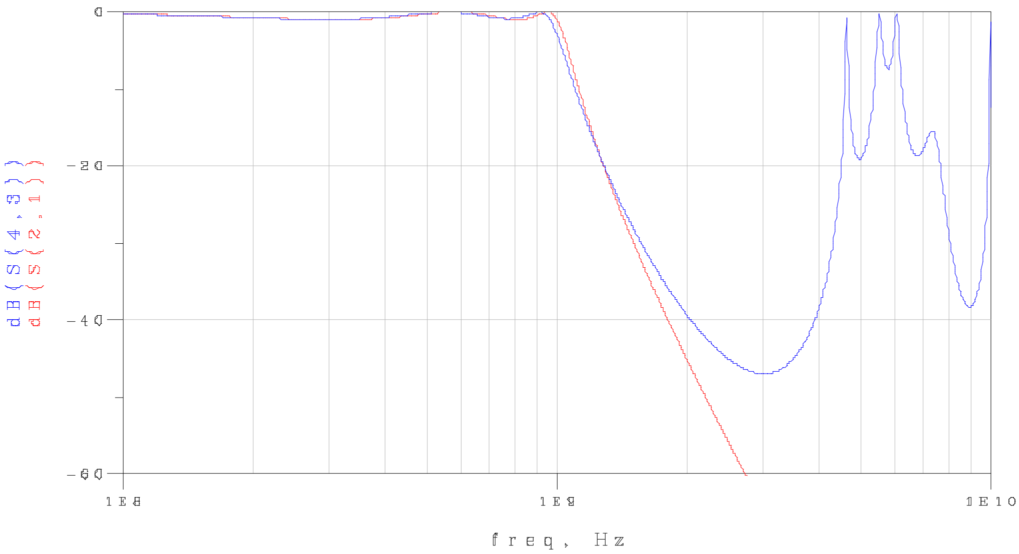
1. <u>Filtre passe bas de chebychev d'ordre 5</u>

un filtre passe bas de Chebychev d'ordre 5 d'ondulation 1 dB dans la bande passante [0 ; 1GHz]. La simulation figurée ci-dessous montre que le comportement du filtre réalisé avec des lignes en remplacement des composants est très proche de la réponse idéale.



<u>Schéma du filtre électrique en haut et du filtre à ligne en bas</u>

<u>Layout du filtre à ligne (échelle 2)</u>



freq	Long1	Long2	Long3	Lambda10	...0 < invalid>
100000000.0...	0.01029	0.01536	0.01444	0.15125	

<u>réponse du filtre électrique parfait en trait pointillé rouge et du filtre à ligne en trait plein bleu</u>

2. Filtres Passe Bas de Cauer d'ordre 3

Ci-dessous est la réalisation d'un filtre passe bas de Cauer d'ordre 3 d'ondulation 1 dB dans la bande passante [0 ; 1GHz] avec une atténuation de 35dB minimum après 2.048GHz. La simulation figurée ci-dessous montre que le comportement du filtre réalisé avec des lignes en remplacement des composants est assez proche de la réponse idéale. La capacité série centrale a été réalisée grâce à une capacité interdigitée.

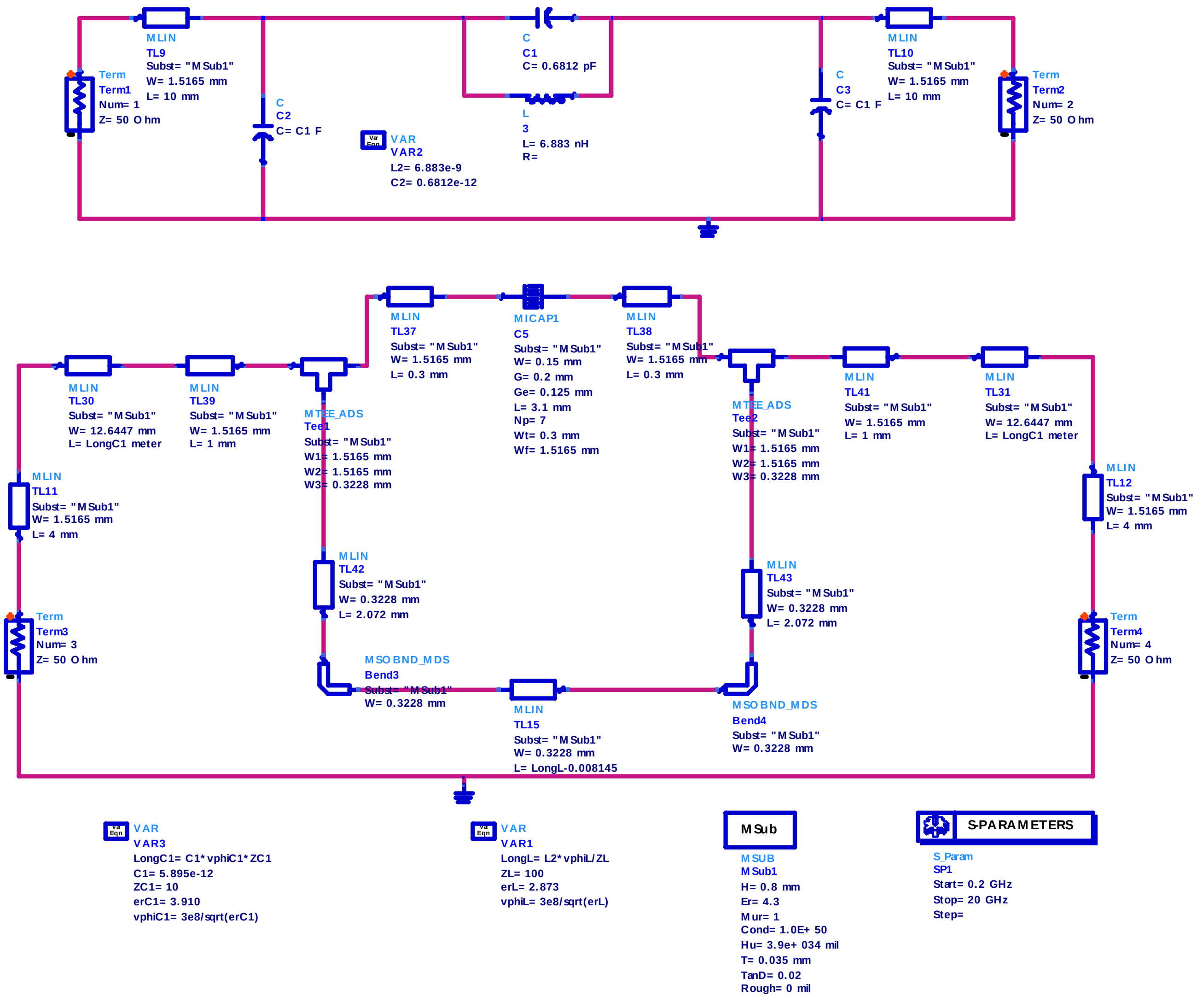
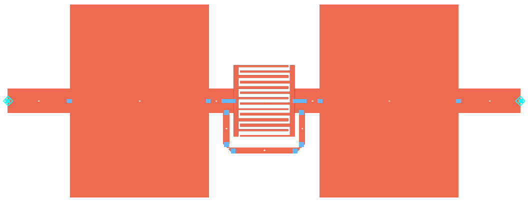
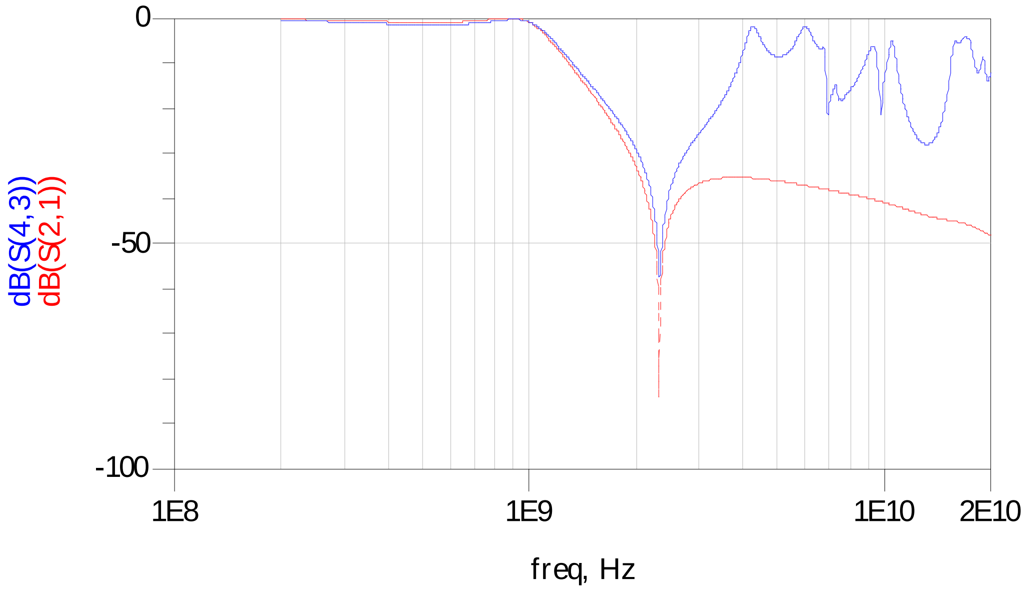


Schéma du filtre électrique en haut et du filtre à ligne en bas



LongL	LongC1
1.218E-2	8.944E-3

Layout du filtre à ligne (échelle 2)

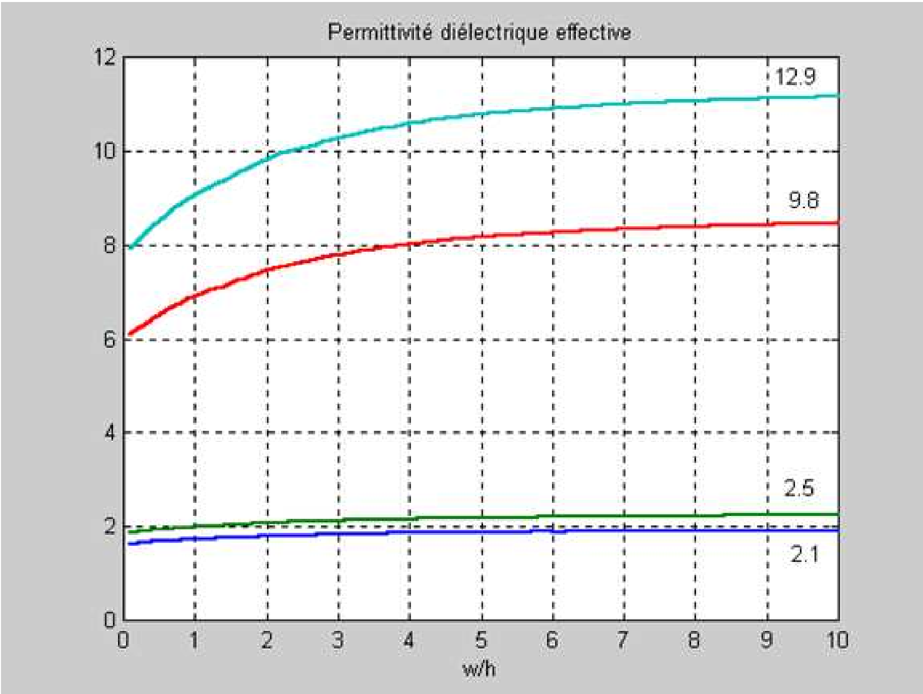


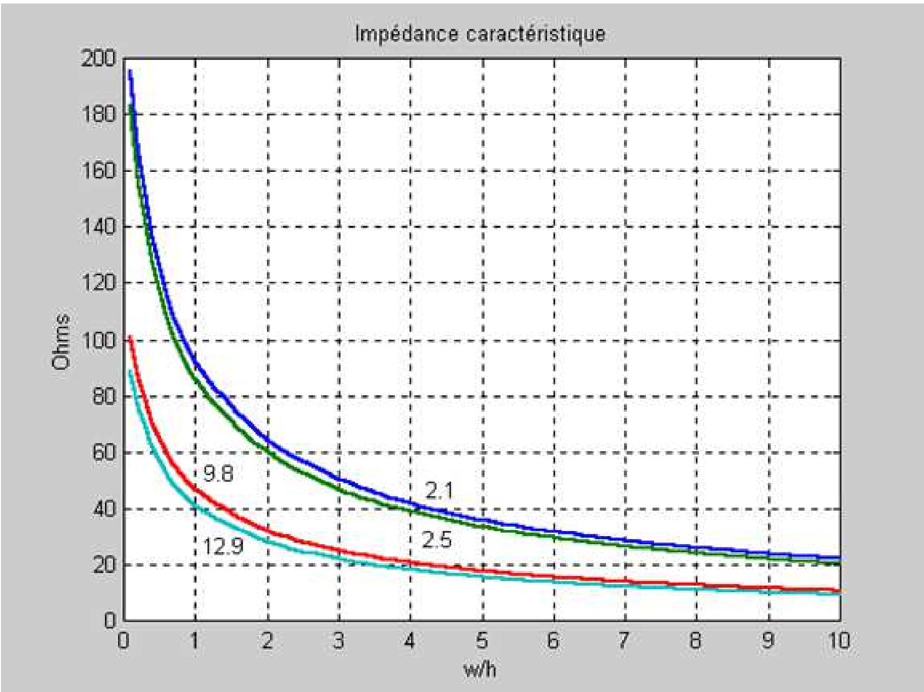
réponse du filtre électrique parfait en trait pointillé rouge et du filtre à ligne en trait plein bleu

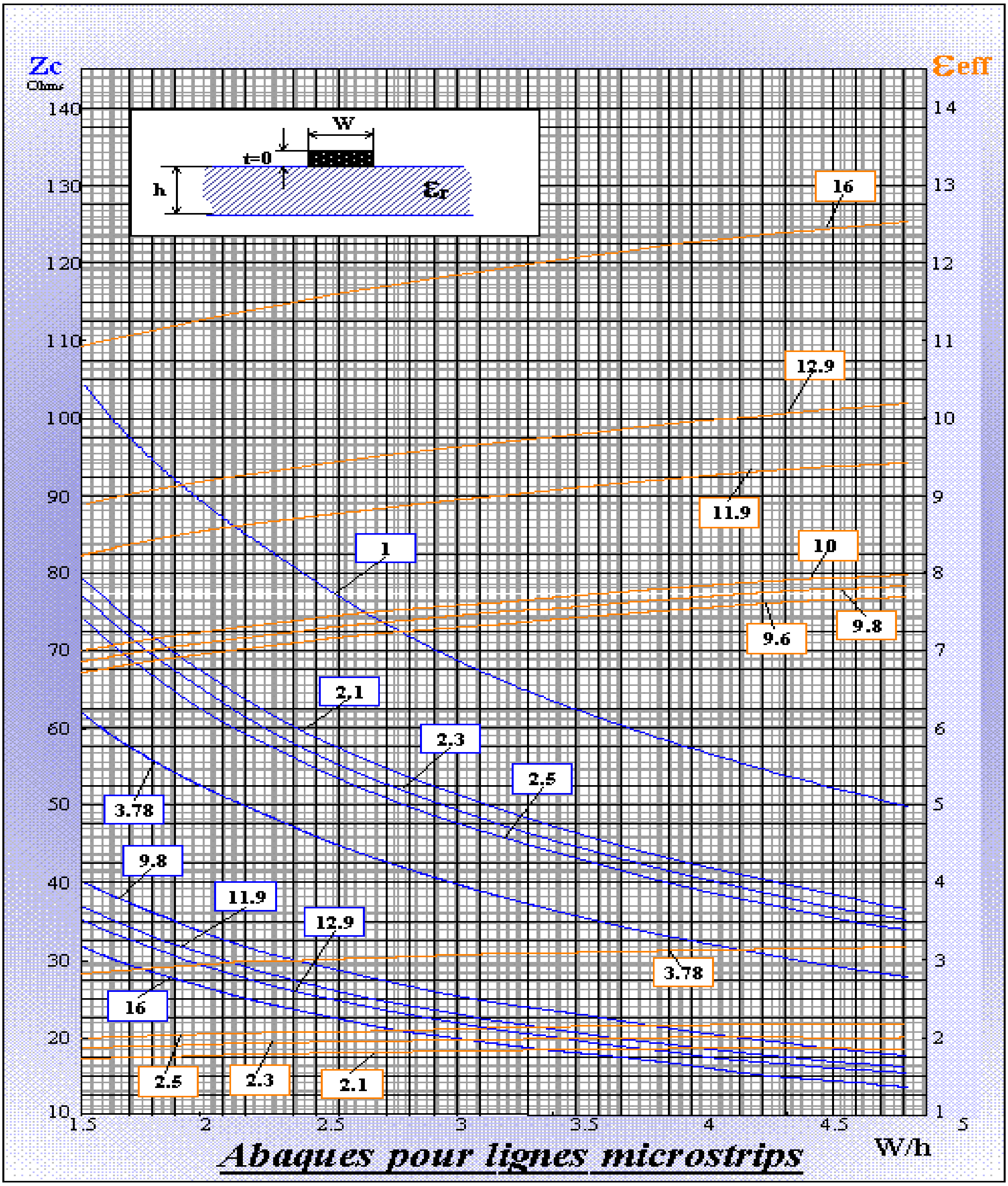
3. Filtres Passe haut de Butterworth du 5eme ordre

4. Filtres Passe Bande de Chebychev du 3eme ordre

V.ANNEXES


Permittivité diélectrique effective
12
10
8
6
4
2
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
w/h
12.9
9.8
2.5
2.1


Impédance caractéristique
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
Ohms
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
w/h
9.8
12.9
2.1
2.5


Zc
Ohms
εeff
W
t=0
h
εr
16
12.9
11.9
10
9.8
9.6
1
2,1
2,3
2,5
3.78
9.8
11.9
12.9
16
3.78
2.5
2.3
2.1
W/h
Abaques pour lignes microstrips

Formules d'analyse

$$\varepsilon_{eff} = \frac{1}{2}(\varepsilon_r + 1) + \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\left(\left(1 + 12\frac{h}{w}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0.04\left(1 + \frac{w}{h}\right)^{2}\right) \quad \text{si} \quad \frac{w}{h} < 1$$

$$\varepsilon_{eff} = \frac{1}{2}(\varepsilon_r + 1) + \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\left(1 + 12\frac{h}{w}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{si} \quad \frac{w}{h} > 1$$

$$Zc = \frac{Zo}{2\pi\sqrt{\varepsilon_{eff}}}\ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right) \quad \text{si} \quad \frac{w}{h} < 1$$

$$Zc = \frac{Zo}{\sqrt{\varepsilon_{eff}}}\left(\frac{w}{h} + 1.393 + 0.667\ln\left(\frac{w}{h} + 1.44\right)\right)^{-1} \quad \text{si} \quad \frac{w}{h} > 1$$

avec $Zo = 120\pi$ (impédance du vide)

Formules de synthèse

$$w = 4h\left(\frac{1}{2}\exp(A) - \exp(-A)\right)^{-1} \quad \text{si} \quad \frac{w}{h} < 2$$

avec $$A = \pi\sqrt{2 + (\varepsilon_r + 1)}\left(\frac{Zc}{Zo}\right) + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\left(0.23 + \frac{0.11}{\varepsilon_r}\right)$$

Formules pratiques pour l'utilisation des lignes micro-ruban

Formules de Hammerstad

VI.BIBLIOGRAPHIE

- T.C.Edwards, "Conception des circuits micro ondes, Masson.
- Paul F. Combes, "Micro ondes " Tomes 1 et 2, Dunod.
- Brian C. Wadell, "Transmission Line Design Handbook", Artech House.
- G. L. Matthaei, Leo Young, E.M.T. Jones, "Microwave filters, impedance matching networks and coupling structures." Mc Graw-Hill.
- polycopié de filtrage analogique de Licence Sciences de l'Ingénieur de l'UPMC, T.Ditchi