

filtrage Analogique

partie 1

Les systèmes linéaires

T. Ditchi

Table des matières

I.	<i>Introduction</i>
II.	<i>Les systèmes linéaires</i>
III.	<i>Etude des systèmes linéaires par transformée de Laplace et de Fourier</i>
IV.	<i>Systèmes du 1^{er} et du 2nd ordre</i>
V.	<i>Gabarits - Normalisation - Transposition</i>
VI.	<i>Calcul de la Fonction de Transfert à partir du Gain</i>
VII.	<i>Filtres Prototypes</i>
VIII.	<i>Synthèse des Filtres Passifs</i>
IX.	<i>Synthèse des Filtres Actifs Généralisés</i>
X.	<i>Synthèse des Filtres Actifs en Cascade de Cellules à A.O.P et à Intégrateur</i>

I. INTRODUCTION

① INTRODUCTION I.1

Un filtre en électronique est un circuit ou un programme dont le rôle est de modifier le contenu spectral des signaux le traversant, en éliminant une partie de l'information liée au signal, d'éliminer des parasites le perturbant...

Un filtre analogique est plus souvent un "sélecteur" de fréquence, alors que les filtres numériques ont un but plus général de transformer le signal (sélecteur de fréquence, echo, transformation fréquentielle... etc...) -

Nous verrons successivement dans ce cours qu'on utilise des filtres analogiques et plus spécifiquement des filtres actifs.

Au vu de cette liste de filtres dans les nombreux domaines :

- radio communication : sélecteur de bande...
- analyse spectrale
- élimination du bruit
- sélecteur de fréquence en sortie de microphone...
- ... etc...

Les technologies utilisées en filtrage analogique (I.2) ont très nombreuses et dépendent en général de la gamme de fréquence concernée.

- Les filtres actifs à amplificateur opérationnel ne sont utilisés qu'en dessous de 10 MHz mais ont l'avantage de ne pas nécessiter de self dans le pif et l'accouplement n'est pas important à ces faibles fréquences.

- Les filtres passifs sont utilisables à toute fréquence mais, utilisant des condensateurs et des selfs, ils sont difficilement réalisables à basse fréquence.

En vu de ces ordres de 10 GHz à 100 GHz, ils sont les seuls filtres utilisables.

Dans ce domaine de fréquence, les selfs peuvent être des composants (bobines) ou réalisés d'un noyau en bobinage dans l'air ou des pistes directement "imprimées" sur les circuits. Elles peuvent encore être réalisées à partir de lignes de transmission (voir cours de lignes). On parle alors de filtres à constante répartie pas oppositif aux technologies à constante

I.3

La cascade utilisant des composants -

- Il existe d'autres technologies que celles utilisant des condensateurs, des inductances et des APF.

- Les filtres à quartz (ou à piézoélectrique)

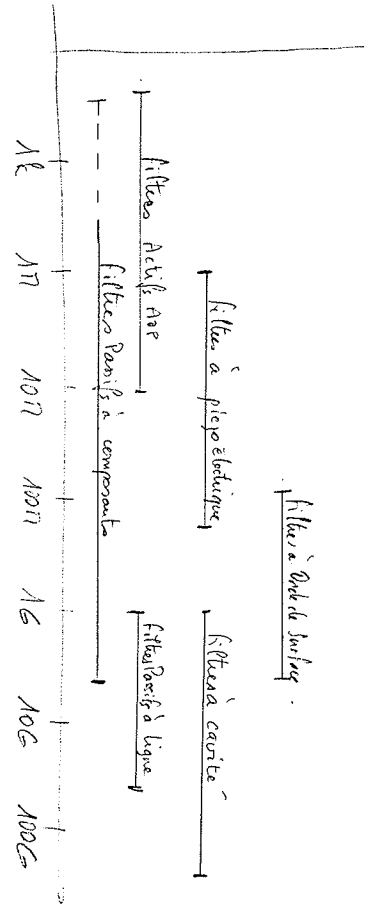
→ qq MHz à 100 MHz

- Les filtres à onde acoustique (SAW)

→ qq 100MHz à qq GHz

- Les filtres à cavité microélectrique ou diélectrique

→ qq GHz à qq 100 GHz -



II. LES SYSTEMES LINEAIRES

II Les Systèmes Linéaires

II.1

I Définition d'un signal

Toute grandeur physique qui dépend de paramètres peut être représentée par une fonction réelle.

ex : - température = fonction de l'altitude $T(x, y, z)$.

- Tension = fonction du temps $V(t)$.

Nous limiterons notre cours aux signaux en électronique fonction du temps.

Les signaux sont naturellement continus (aucun phénomène physique ne peut varier instantanément) -

Les signaux sont périodiques ou non.

Ex de signaux en électronique :

* La tension aux bornes d'une pile de courant est représentée par une fonction périodique sinusoidale du temps $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$

* La tension aux bornes d'une capacité ou d'un condensateur est une fonction périodique $V(t) = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$

Si le signal devient nul à partir d'un certain temps, ce signal est qualifié de transitoire

Transitoire

II.2

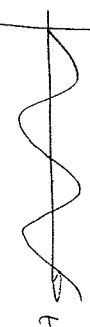
En pratique un signal qui serait "idéalement" pur n'existe pas (rigoureusement le pas total d'observation) sera qualifié de transitoire également.

lorsqu'un signal varie "rapidement", il sera parfois plus simple de le représenter à l'aide de "fonctions" discontinues. Par exemple,

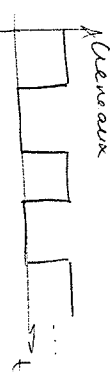
les signaux utilisés en électronique numérique sont souvent assimilés à des niveaux parce que ceux-ci peuvent prendre 2 valeurs : 0 ou 1, alors qu'en réalité, les transitions de tension d'un niveau à un autre ne sont pas instantanées.

II Exemples de Signaux "Classiques" en électronique.

Signal numérique



Signaux périodiques discontinus



peignes

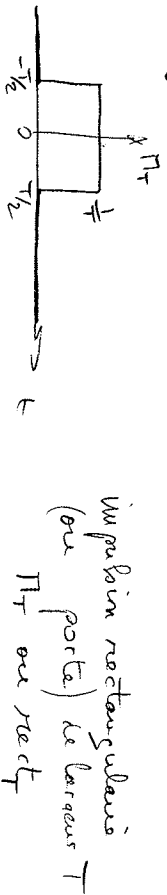


peignes de Dirac

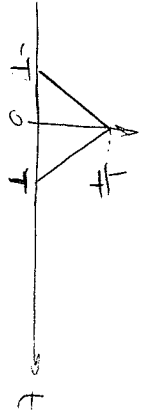
$$\delta(t) \text{ ou } \text{pgn}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Signaux transitoires ou impulsifs

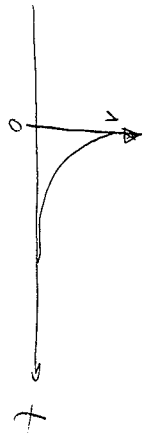
(II.3)



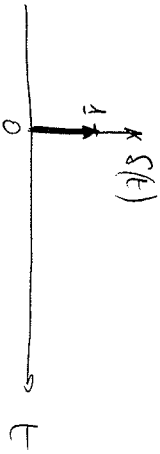
impulsion rectangulaire
(ou porte) de largeur T
 Π_T ou rect_T



impulsion triangulaire
 Δ_T ou $\text{tri}_T(t)$



impulsion exponentielle
 $\int = T e^{-t/T}$ ou $e^{-t/T} u(t)$
ou $e^{-t/T} u(t)$



impulsion de Dirac
 $\delta(t)$ définie dessous

Impulsion de Dirac

Les impulsions définies ci-dessus de largeur "finie" ont toutes de "surface" unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tri}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x/T} u(t) dt = 1$$

On définit l'impulsion de Dirac comme une impulsion de largeur nulle mais de surface unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$\delta(t)$ peut être définie comme :

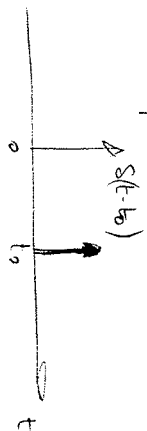
$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\Pi_T}{T} = \lim_{T \rightarrow 0} \text{tri}_T'(t)$$

$$= \lim_{T \rightarrow 0} T e^{-t/T} u(t)$$

Propriétés de Dirac

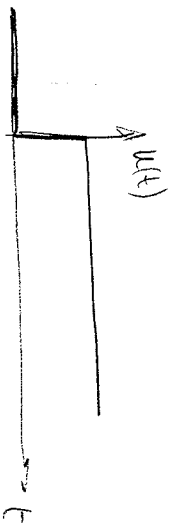
(II.4)

- $\delta(t-t_0)$ est l'impulsion de Dirac décalée de t_0 .



- $x(t) \delta(t-t_0) = x(t_0) \delta(t-t_0)$.

Signal Echelon de Heaviside

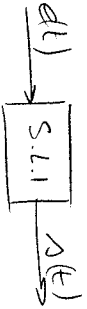


$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

2°/ Expression de la réponse de sortie :

II.7

Soit le système linéaire indépendant du temps suivant :



Supposons que l'on présente à l'entrée du système le signal d'entrée $s(t)$ (impulsion de Dirac).



La réponse du système notée $k(t)$ est appelée réponse impulsionnelle.

Si on présente à l'entrée le signal $e(t)$, $e(t)$ peut être décomposé en une somme d'impulsions de Dirac tel que présente auparavant :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') \delta(t-t') dt'$$

Comme le système est linéaire, la réponse $r(t)$ du système à cette succession d'impulsions est la somme de réponses impulsionnelles :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') k(t-t') dt'$$

c'est à dire

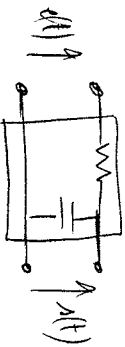
$$r(t) = e(t) * k(t)$$

La réponse du système est donc le produit de convolution du signal d'entrée $e(t)$ par la réponse impulsionnelle $k(t)$:

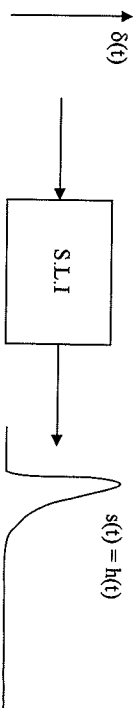
II.8

3°/ Exemples de systèmes

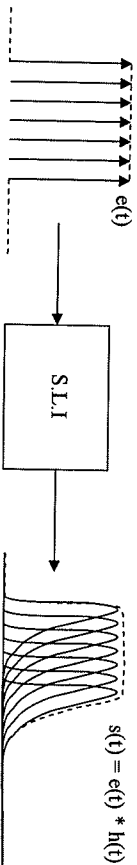
⊕ Soit le système suivant



La réponse de ce système à une impulsion de Dirac



alors la réponse à un signal complexe comme le suivant :



La sortie est une image "floue" de l'entrée.

$r(t) = e(t) * h(t)$ le produit de convolution donne une image "floue" ("molle") de l'entrée.

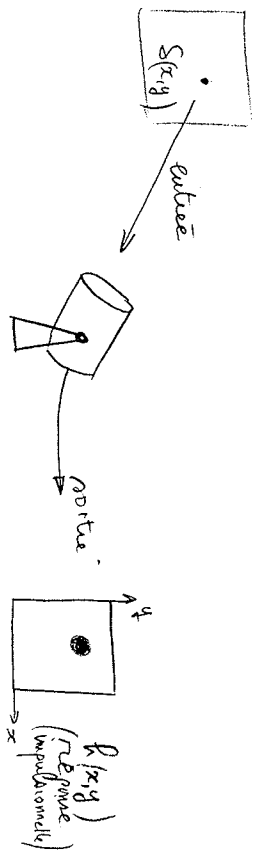
* Si l'on considère un télescope,

on n'ose et déformeur une image grossie mais la plus précise possible du ciel.

On peut considérer qu'une étoile lointaine est

une source ponctuelle de lumière (un diac spatial).

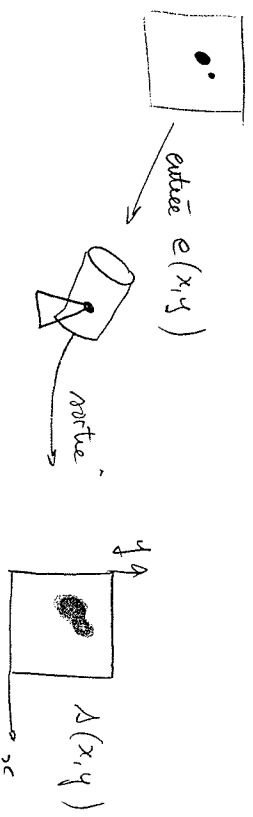
On observe l'in à travers le télescope



Alors la réponse du télescope à une image plus

complexe telle que le système binaire "Gamma

Andromède" est :



l'image donnée par le télescope est donc

une représentation floue de la source.

$$O(x,y) = e * h$$

III Stabilité des systèmes linéaires.

La réponse $o(t)$ d'un système linéaire indépendante

du temps à une excitation $e(t)$ est solution

de l'équation différentielle à coefficients constants :

$$b_n \frac{d^n o}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} o}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 o = a_m \frac{d^m e}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 e$$

avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ constants

Exemple : soit un circuit résonnant serie

$$e(t) \uparrow \frac{R}{c} \frac{d^2 i}{dt^2} + L \frac{di}{dt} + \Delta(t) \quad \downarrow \quad o(t) = R i + L \frac{di}{dt} + \Delta(t)$$

$$o(t) \downarrow \quad i(t) = c \frac{do}{dt}$$

$$\text{donc } o(t) = R c \frac{do}{dt} + L c \frac{d^2 o}{dt^2} + \Delta(t)$$

La résolution de cette équation différentielle dépend du régime temporel. On peut soit considérer que l'on est en régime permanent soit en régime transitoire.

* Etre en régime permanent signifie que l'entrée est soit constante (régime continu) soit sinusoidale (régime permanent alternatif).

* Etre en régime transitoire signifie que l'entrée est nulle ou change d'un instant de temps. On peut alors toujours placer l'origine des temps ($t=0$) au début du signal d'entrée. dans régime transitoire $\Leftrightarrow \begin{cases} e(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ e(t) \neq 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

La résolution de l'équation différentielle se fait en deux étapes :

- recherche des solutions générales de l'équation sans second membre. Cela correspond à annuler l'entrée $\theta(t)$ à étudier les variations de la sortie $x(t)$ alors qu'à $t=0$ le système est dans un état quelconque. C'est le régime libre.

- recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Cela correspond à étudier le régime forcé (transitoire suivi ou non du régime permanent).

L'étude du régime libre nous renseigne sur la stabilité du système. En effet, le système est stable si, quand l'entrée est nulle, la réponse du système $x(t)$ tend vers 0.

Stabilité du Système

Afin d'étudier le régime libre, nous cherchons donc les solutions de l'équation différentielle sans second membre (cad qd l'entrée est nulle).

$$b_n \frac{d^n \Delta}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} \Delta}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \Delta = 0 \quad (\text{eq 1})$$

I.12

Les fonctions de la forme e^{pt} sont solutions de cette équation différentielle. En effet,

$$\frac{d}{dt}(e^{pt}) = p e^{pt} ; \dots ; \frac{d^k}{dt^k}(e^{pt}) = p^k e^{pt} .$$

L'équation différentielle devient donc :

$$\left[b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0 \right] e^{pt} = 0$$

Si $e^{pt} \neq 0 \forall p, t$. On a donc

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0 = 0 \quad (\text{eq 2})$$

appelée équation caractéristique. Cette équation

possède n solutions (ou racines) notées :

p_1, p_2, \dots, p_n . Les racines peuvent être réelles

ou multiples, réelles ou complexes. [On retrouvera

cette équation caractéristique dans un chapitre

ultérieur. Il est égal au dénominateur de la

fonction de transfert que l'on obtiendra grâce

à la transformée de Laplace.]

On notera que les racines de $P(s)$ peuvent être :

- racines réelles : $P_i = \alpha_i$
- racines complexes : $P_i = \alpha_i + j\omega_i$
- doubles réelles : $P_i = P_{i1} = \dots = P_{iR_i}$

On peut alors factoriser le polynôme caractéristique :

$$(P - p_1)(P - p_2) \dots (P - p_n) = 0$$

Il faut remarquer que les racines complexes sont par paires. Si $p_i = \alpha_i + j\omega_i$ est solution de l'équation caractéristique, alors $p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$ l'est aussi.

$$\text{En effet } (P - p_i)(P - p_i^*) = \underbrace{P^2 - 2\alpha_i P + |\alpha_i|^2}_{\text{coefficients réels}}$$

ne donne que des coefficients réels comme c'est le cas dans l'équation différentielle de tout système physique.

Étudier la stabilité revient à étudier l'évolution temporelle des solutions de l'équation (1).

Si l'équation caractéristique (1) a une racine réelle

$$p_i = \alpha_i \text{ alors la solution de l'équation diff (1)}$$

$$n'écrit : \lambda(t) = e^{\alpha_i t}$$

cette solution ne correspond à une réponse stable c'est à dire n' annule à $t \rightarrow \infty$ que si $\alpha_i < 0$.

Si l'équation caractéristique (1) a des racines complexes : $p_i = \alpha_i + j\omega_i$ et $p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$ alors la solution de l'équation (1) n'écrit comme combinaison linéaire de $e^{p_i t}$ et $e^{p_i^* t}$:

$$\lambda(t) = a e^{(\alpha_i + j\omega_i)t} + b e^{(\alpha_i - j\omega_i)t} \quad \text{II.14}$$

$$= (a+b) e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t) + j(a-b) e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t).$$

solution en général complexes qui ne peuvent être un système réel. Le choix des constantes (a, b) a été fait tel que ces solutions restent réelles. On constate que :

$$e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t) \text{ et } e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t)$$

sont solutions de l'équation (1) et on montre que la solution générale de (1) est donc

$$\lambda(t) = c e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t) + d e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t),$$

ou $c, d \in \mathbb{R}$

Cette solution ne correspond à une réponse stable que si $\alpha_i < 0$.

Si l'équation caractéristique (2) admet une racine double réelle : $p_i = \alpha_i$ une seule solution apparaît : $\lambda(t) = e^{\alpha_i t}$. Il manque alors une solution !

Comme $\lambda(t) = x(t) e^{\alpha_i t}$ et remplaçons $\lambda(t)$ dans l'équation différentielle (1) en nous limitant à une équation d'ordre 2 ($n=2$) pour comprendre le principe du calcul.

équation différentielle d'ordre 2: (II.15)

$$b_2 \lambda'' + b_1 \lambda' + b_0 \lambda = 0 \quad (3)$$

l'équation caractéristique:

$$b_2 \rho^2 + b_1 \rho + b_0 = 0 \quad (4)$$

qui admet une racine double (discriminant $\Delta = 0$)

$$\rho = \lambda = -\frac{b_1}{2b_2}$$

$e^{\lambda t}$ est solution, cherchons la deuxième solution

du type $\lambda(t) = x(t) e^{\lambda t}$

On a donc $\lambda'(t) = x' e^{\lambda t} + x \lambda e^{\lambda t}$

et $\lambda''(t) = x'' e^{\lambda t} + 2x' \lambda e^{\lambda t} + x \lambda^2 e^{\lambda t}$

l'équation (3) devient donc:

$$e^{\lambda t} [b_2 (x'' + 2x' \lambda + x \lambda^2) + b_1 (x' + x \lambda) + b_0 x] = 0$$

ce qui à dire: $b_2 x'' + x (b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0) + x' (b_2 2\lambda + b_1) = 0$

Or $b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0$ puisque λ est solution de (4)

et $2b_2 \lambda + b_1 = 2b_2 (-\frac{b_1}{2b_2}) + b_1 = 0$

il reste donc: $b_2 x'' = 0$

qui a comme solution en intégrant 2 fois:

$$x = ct + d$$

la solution est donc de la forme:

$$\lambda(t) = (ct + d) e^{\lambda t}$$

(II.16)

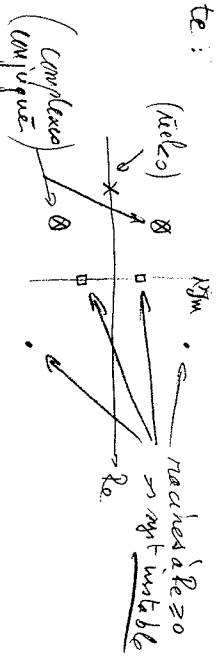
cette solution ne correspond à une réponse stable que si $\underline{\underline{\lambda < 0}}$.

Conclusion sur la stabilité:

Un système physique ne sera stable que si en l'absence d'excitation ($e(t) = 0$) la réponse du système $\lambda(t)$ n'annule qd $t \rightarrow \infty$ et ceci quel qu'ait les conditions initiales.

En étudiant l'équation différentielle du système dans laquelle on a annulé l'entrée $e(t)$ (réponse libre) on a montré que les solutions générales convergent à une réponse qui tendent à 0 annuler si la partie réelle des racines de l'équation caractéristique sont toutes negatives.

On peut représenter dans le plan complexe, les racines de l'éq caractéristique sur la figure suivante:



II.17

2) le polynome de l'equation caracteristique :

$$D(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0$$

a tous ses coefficients b_k positifs et non nuls

il correspond a un systeme stable.

Demonstration :

$D(p)$ peut etre factorise de la maniere

$$\text{suivante : } D(p) = (p-p_1)(p-p_2) \dots (p-p_n)$$

ou p_1, p_2, \dots, p_n ont les racines l'equation

caracteristique (2).

Les racines ont soit reelles $p_i = \alpha_i$, soit

complexes $p_i = \alpha_i \pm j\omega_i$, soit reelles doubles $p_i = \alpha_i$.

avec $\alpha_i < 0$ pour un systeme stable.

- chaque $(p-p_i)$ avec p_i reel < 0 donne tous

les coefficients reels positifs : $[p + \underbrace{(\alpha_i)}_{>0}]^x [p + \underbrace{(\alpha_i)}_{>0}]^y \dots$

- chaque racine complexe $p_i = \alpha_i \pm j\omega_i$ donne

$$(p + p_i)(p - p_i^*) = p^2 + p(-p_i - p_i^*) + |p_i|^2$$

$$= \underbrace{p^2 + p(-2\alpha_i)}_{>0} + \underbrace{|p_i|^2}_{>0} \text{ dont tous les coefficients}$$

est > 0 .

On appelle un tel polynome, un polynome de Hurwitz,

- tous ses coefficients sont positifs et nuls,
- toutes ses racines ont a partie reelles < 0 .

III. ETUDE DES SYSTEMES LINEAIRES PAR TRANSFORMEE DE LAPLACE ET DE FOURIER

III. ETUDE DES SYSTEMES LINEAIRES PAR TRANSFORMEE DE LAPLACE ET DE FOURIER

1. RAPPELS SUR LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

1°) Définition

La transformée de Laplace permet de passer d'un signal $s(t)$ à une fonction à variable complexe $S(p)$

$$s(t) \rightarrow S(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$$

où $p = \sigma + j\omega$ est une variable complexe.

On utilisera essentiellement la Transformée de Laplace unilatérale applicable aux signaux causaux (nuls pour $t < 0$)

$$s(t) \rightarrow S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$$

On définit également la transformée de Laplace inverse :

$$S(p) \rightarrow s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} S(p)e^{pt} dp$$

II. PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

Propriétés	Signal temporel	Transformée de Laplace
Linéarité	$a s_1(t) + b s_2(t)$	$a S_1(p) + b S_2(p)$
Dérivation temporelle	$s'(t) = \frac{\partial}{\partial t} s(t)$	$p S(p) - s(t=0^+)$
Dérivation	$s^{(n)}(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} s(t)$	$p^n S(p) - p^{n-1}s(t=0^+) - p^{n-2}s'(t=0^+) - \dots - p s^{(n-2)}(t=0^+) - s^{(n-1)}(t=0^+)$
	$-t s(t)$	$\frac{\partial}{\partial p} S(p)$
Intégration	$\int_0^t s(t') dt'$	$\frac{S(p)}{p}$
Décalage	$s(t-a)$	$e^{-ap} S(p)$
	$e^{at} s(t)$	$S(p-a)$
Contraction	$s(at)$	$1/ a S(p/a)$
Convolution	$s_1(t) * s_2(t)$	$S_1(p) S_2(p)$
	$s_1(t) s_2(t)$	$S_1(p) * S_2(p)$

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p)$$

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p)$$

Théorème de la somme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} S(p)$$

Table de Transformée de Laplace

n°	s(t) causaux (s(t<0)=0)	S(p)
1	Dirac $\delta(t)$	1
2	Peigne de Dirac $p \sum_n \delta(t-nT)$	$\sum_n e^{-npT}$
3	Echelon de Heaviside $u(t)$	$1/p$
4	t	$1/p^2$
5	t^m	$m! / p^{m+1}$
6	e^{at}	$1 / (p+a)$
7	$t e^{at}$	$1 / (p+a)^2$
8	$\frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{at}$	$1 / (p+a)^m$
9	$(1-e^{-at})$	$\frac{a}{p(p+a)}$
10	$at - 1 + e^{-at}$	$\frac{a^2}{p^2(p+a)}$
11	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
12	$b e^{-bt} - a e^{-at}$	$\frac{(b-a)p}{(p+a)(p+b)}$
13	$(1-a t) e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$
14	$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
15	$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
16	$\sin(bt) e^{-at}$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
17	$1 - \frac{1}{b-a} (b e^{-at} - a e^{-bt})$	$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
18	$\frac{\omega_N}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_N t} \sin(\omega_N \sqrt{1-\zeta^2} t)$	$\frac{1}{\omega_N} \frac{p^2 + 2\zeta p + 1}{p^2 + \omega_N^2}$ avec $\zeta < 1$
19	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_N t} \sin(\omega_N \sqrt{1-\zeta^2} t + \psi)$ avec $\psi = \arccos(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$	$\frac{1}{\omega_N} \frac{1}{\left(\frac{p^2 + 2\zeta p + 1}{\omega_N^2} + 1 \right)}$ avec $\zeta < 1$

III.3
II. Systèmes linéaires et Transformation de Laplace

1° On a vu qu'un système linéaire peut être décrit par une équation différentielle linéaire reliant le signal d'entrée au signal de sortie :

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 x(t) \quad (1)$$

Le système est invariant dans le temps si les coefficients b_i et a_j ont caractéristiques.

Nous allons utiliser la transformée de Laplace pour résoudre cette équation différentielle

Afin de simplifier les calculs, nous allons limiter notre raisonnement à une équation différentielle du 2nd ordre :

$$b_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x \quad (2)$$

Par l'application de la transformée de Laplace l'équation différentielle (2) devient :

$$\left. \begin{aligned} b_2 [p^2 Y(p) - p y(0^+) - y'(0^+)] \\ + b_1 [p Y(p) - y(0^+)] \\ + b_0 Y(p) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} a_2 [p^2 X(p) - p x(0^+) - x'(0^+)] \\ + a_1 [p X(p) - x(0^+)] \\ + a_0 X(p) \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Ce qui peut encore s'écrire comme :

III.4

$$\left. \begin{aligned} S(p) [b_2 p^2 + b_1 p + b_0] \\ - b_2 y(0^+) - b_1 y'(0^+) - b_0 y(0^+) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} E(p) [a_2 p^2 + a_1 p + a_0] \\ - a_2 x(0^+) - a_1 x'(0^+) - a_0 x(0^+) \end{aligned} \right.$$

et donc :

$$S(p) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} E(p) \\ & + \frac{b_2 [y(0^+) + p y'(0^+)] + b_1 y(0^+)}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \\ & - \frac{a_2 [x(0^+) + p x'(0^+)] + a_1 x(0^+)}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{N(p)}{D(p)} E(p) \\ & + \frac{S_0(p)}{D(p)} \\ & + \frac{E_0(p)}{D(p)} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

où $S_0(p)$ est un polynôme en p associé aux conditions initiales de $y(t)$.

$E_0(p)$ est un polynôme en p associé aux conditions initiales de $x(t)$

$\frac{N(p)}{D(p)}$ est le rapport de 2 polynômes d'ordre n .

Quand on étudie un système physique, celui-ci est en général au repos avant d'être excité. Ceci est vrai sauf lorsque l'on désire étudier le comportement du système en régime permanent. Les régimes permanents étudiés sont le régime continu (l'état est un signal constant depuis $t = -\infty$) et le régime

alternatif (l'entrée est un signal nul jusqu'à $t = -\infty$ et commence en $t = -\infty$). L'étude de la réponse du système dans ces 2 derniers cas se fait alors en utilisant des outils de calcul plus appropriés tel que la transformée de Fourier (voir après).

Si on se limite ici aux réponses "qui ont commencé un jour" on place alors l'origine des temps ($t=0$) à cet instant.

Les 2 polynômes associés aux conditions initiales $E_0(p)$ et $S_0(p)$ ont alors vult. puisque le système est au repos pour $t \leq 0$.

$$S(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \quad E(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad E(p) = H(p)E_0(p)$$

La fonction $H(p)$ est appelée fonction de transfert du système et on a :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} = \frac{TL(A(t))}{TL(e(t))} \quad \text{ou } \frac{A(t=0)}{A(t=0)} = 0 \quad (4)$$

2°) Réponse du système linéaire.

On a vu au chapitre précédent que si $e(t)$ est le signal appliqué à l'entrée du

système, et $n(t)$ le signal en sortie, alors : III.6

$$n(t) = e(t) * k(t)$$

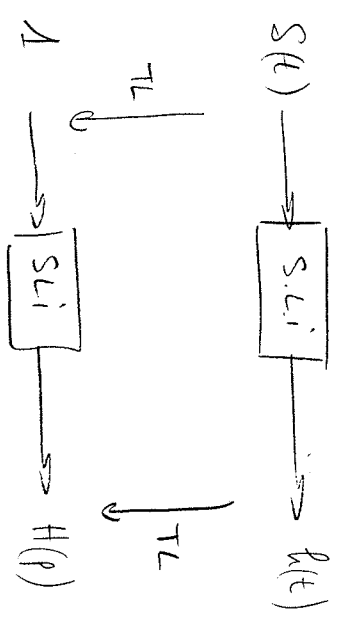
où $k(t)$ est la réponse impulsionnelle du système (réponse à un Dirac $e(t) = \delta(t)$)

Par application de la transformée de Laplace à cette relation on trouve :

$$S(p) = E(p) \cdot TL[k(t)] \quad \text{ce qui en}$$

comparant avec (4) donne : $H(p) = TL[k(t)] \quad (5)$

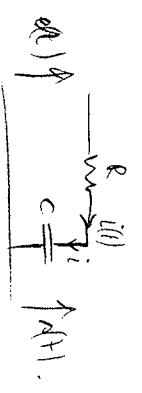
La fonction de transfert est donc la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle - on peut résumer cela par le schéma suivant :



3°) Exemple de calcul de réponse d'un système linéaire.

III.7

Prendre un système du 1^{er} ordre du type suivant :



équation différentielle

$$e - v = R i$$

$$dt \quad i = C \frac{dv}{dt}$$

$$d'où \quad 1 + RC \frac{dv}{dt} = e(t)$$

Pas transformée de Laplace :

$$S + RCPS = E$$

$$\text{cad } \left| \frac{S(t)}{E(t)} = \frac{1}{1+RCp} \right.$$

directement en Laplace.

$$E(p) - S(p) = R I(p)$$

$$\text{et } I(p) = C p S(p)$$

$$\left(\begin{array}{l} S = Z_c I \\ \text{ou } Z_c = \frac{1}{Cp} \end{array} \right)$$

$$d'où : E - S = RCpS$$

$$\text{cad } \frac{S}{E} = \frac{1}{1+RCp}$$

Calcul de la sortie quand l'entrée est une échelon de Tension :

$$e(t) = u(t) \rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$$

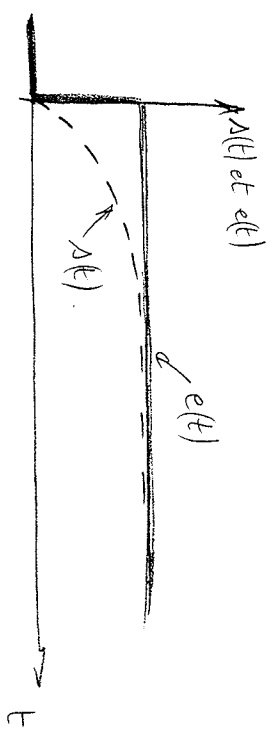
$$\text{d'où } S = \frac{1}{p} \frac{1}{1+RCp}$$

on regardant dans le tableau des TL (ligne 9) :

$$\text{on a } \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p(1+RCp)} \right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1/Rc}{p \left(\frac{1}{Rc} + p \right)} \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1 - e^{-t/Rc}} \right)$$



III.8

III.9 Rappel sur la Transformée de Fourier

1^{er} Série de Fourier

Tout signal périodique peut se décomposer en série de Fourier, c'est à dire en somme de sinusoides.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

où $C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ et T est la période de $x(t)$. $\omega_0 = 2\pi f_0$

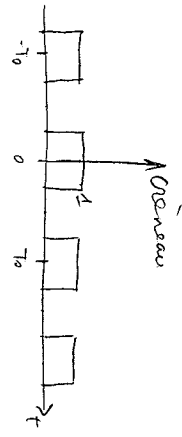
Un signal périodique de période T_0 (fréquence f_0) est donc la somme de multiples de fréquence ($n f_0$). Le premier terme C_0 ($n=0$) est une constante de fréquence nulle, c'est à dire un signal continu. Ce représente la valeur moyenne de $x(t)$. On appelle fréquence fondamentale la fréquence f_0 , et harmoniques les multiples de la fréquence $n f_0$.

Exemple 1: le signal carré $C_T(t)$ positif pair.

on trouve : $C_n = \frac{1}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} = C_{-n}$

$$\begin{aligned} C_T(t) &= \text{carré} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + C_0 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2C_n \cos(n\omega_0 t) + C_0 \end{aligned}$$

donc $\text{carré}(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega_0 t) - \frac{2}{7\pi} \cos(7\omega_0 t) + \dots$ (III.10)



On peut remarquer que le signal carré ne contient, en plus de sa composante continue, que la fréquence fondamentale et les harmoniques impaires ($(2p+1)f_0$).

Exemple 2: $x(t) = \sin \omega_0 t$ ne se décompose en

$$x(t) = e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}$$

on a donc 2 coef C_n non nuls : $C_{-1} = C_1 = 1$ on peut remarquer qu'un signal purement sinusoidal se décompose en 2 termes ($C_n e^{jn\omega_0 t}$).

2^{er} Transformée de Fourier

Pour les signaux non périodiques, on généralise la notion de série de Fourier en considérant qu'un signal non périodique est un signal périodique de période infinie ! Ainsi les harmoniques ($n \omega_0$) deviennent infiniment proches (ω). On a alors :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

III.11

où $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
 avec $\omega = 2\pi f$.

$X(f)$ est appelée Transformée de Fourier de $x(t)$ et $x(t)$ Transformée de Fourier inverse de $X(f)$.

Exemple : signal carré $\pi_T(t)$ d'amplitude 1.

calculer la transformée de Fourier de $\pi_T(t)$.

$$\begin{aligned} \pi_T(f) &= T F (\pi_T(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_T(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} [e^{-j\omega t}]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{-j\omega} [e^{-j\omega T/2} - e^{+j\omega T/2}] = \frac{2}{\omega} \text{sinc} \omega \frac{T}{2} \\ &= T \frac{\text{sinc} \omega T/2}{\omega T/2} = T \text{sinc}(\omega T/2) = T \text{sinc}(\pi f T) \end{aligned}$$

où sinc est le sinus cardinal ($\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$).

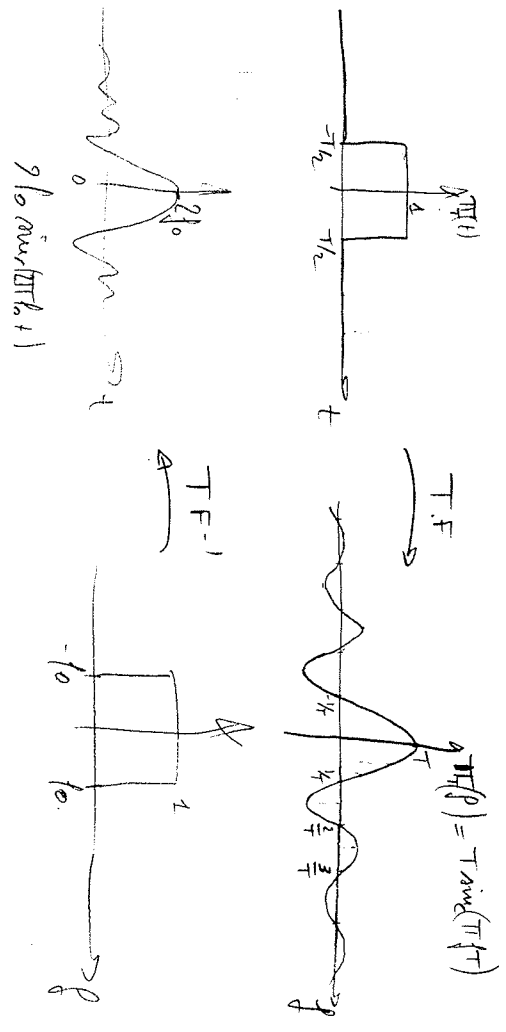
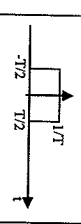


Table de Transformée de Fourier

n°	$s(t)$	$S(f)$
Linéarité	$a s_1(t) + b s_2(t)$ (a et b constants)	$a S_1(f) + b S_2(f)$
Dérivation temporelle	$s'(t) = \frac{\partial}{\partial t} s(t)$	$j\omega S(f)$
Intégrale	$\int s(t) dt$	$\frac{S(f)}{j\omega}$
Convolution	$s_1(t) * s_2(t)$	$S_1(f) S_2(f)$
Produit	$s_1(t) s_2(t)$	$S_1(f) * S_2(f)$
Signal réel	$s(t) \in \mathbb{R}$	$\text{re}[S(f)]$ paire $\text{Im}[S(f)]$ impaire $ S(f) $ paire
Echelon de Heaviside	$u(t)$	$\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{2j\pi f}$
Porte		$\text{sinc}(\pi f T) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$
Sinus	$\sin(2\pi f_0 t)$	$[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)] / (2j)$
Cosinus	$\cos(2\pi f_0 t)$	$[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] / 2$
Dirac	$\delta(t)$	1
Peigne de Dirac	$\text{pgn}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$
Signal périodique	$s(t)$ signal périodique de période T_0	$S(f)$ est discret (pas d'échantillonnage = $1/T_0 = f_0$) On parle de "spectre de raies"
	$s(t) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$	$S(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_0(f - n f_0)$
Signal discret	$s(t)$ signal discret (pas d'échantillonnage = T)	$S(f)$ discrétisé tous les $n f_0$
	$s(t) = s_0(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$	$S(f)$ périodique de période $1/T_e$

III.13

IV) Systèmes Linéaires et Transformée de Fourier.

1°) Réponse Fréquentielle

Si l'on transforme l'équation différentielle du système par Fourier on trouve :

$$[b_n(\omega)^n + b_{n-1}(\omega)^{n-1} + \dots + b_0] S(p) = [a_m(\omega)^m + a_{m-1}(\omega)^{m-1} + \dots + a_0] E(p)$$

d'où

$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_m(\omega)^m + a_{m-1}(\omega)^{m-1} + \dots + a_0}{b_n(\omega)^n + b_{n-1}(\omega)^{n-1} + \dots + b_0} = H(p)}$$

Le rapport de la TF (notée) nu la TF (entrée) est appelée réponse fréquentielle et noté $H(p)$.

On peut remarquer que la réponse fréquentielle est égale à la fonction de transfert dans laquelle

on prend $p = j\omega$.

$$\boxed{H(p) = H(p = j\omega)}$$

2°) Réponse d'un système linéaire

on a vu que $e(t) = r(t) * h(t)$

Par transformation de Fourier cette relation

devient :

$$E(p) = S(p) H(p)$$

$$\text{d'où } H(p) = TF(h(t))$$

III.14

La réponse fréquentielle est due à la Transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle :

V) Détermination de la Réponse

1°) Définition

Si l'on se place au régime alternatif

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t) \xrightarrow{TF} E(\omega) = \frac{E_0}{2} (S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0))$$

alors la réponse à cette excitation sinusoidale :

$$S(\omega) = E(\omega) H(\omega) = \frac{E_0}{2} [S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)] H(\omega)$$

$$= \frac{E_0}{2} [H(\omega_0) S(\omega - \omega_0) + H(\omega_0) S(\omega + \omega_0)]$$

$$\text{or } H(\omega_0) = |H(\omega_0)| e^{j\varphi(\omega_0)} \text{ où } \varphi(\omega_0) = \arg[H(\omega_0)]$$

Comme $H(\omega)$ est la TF de la réponse impulsionnelle qui est un signal réel, $H(\omega)$ est une fonction dont la partie réelle est paire et la partie imaginaire

impaire. On a donc : $H(\omega) = H^*(\omega) = |H(\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$.

$$\text{d'où } S(\omega) = \frac{E_0}{2} |H(\omega)| [e^{j\varphi(\omega)} S(\omega - \omega_0) + e^{-j\varphi(\omega)} S(\omega + \omega_0)]$$

et par transformation de Fourier inverse :

$$s(t) = \frac{E_0}{2} |H(\omega)| [e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} + e^{-j\varphi(\omega)} e^{j\omega t}]$$

cod : $X(t) = e_0 |H(\omega)| \cos(\omega t + Y(\omega))$

où $Y(\omega) = \arg(H(\omega))$

(II.15)

Donc : Quand on excite un système par une sinusoïde, le système répond par une sinusoïde de même fréquence. Le gain en amplitude $|G|$ est égal au module de la réponse fréquentielle à la fréquence d'excitation et le déphasage introduit par le passage du signal à travers le système est égal à l'argument de la réponse fréquentielle.

$$G(\omega) = |H(\omega)|$$

$$\text{déphasage } (\varphi) = \arg(H(\omega))$$

Le Diagramme de Bode est la représentation graphique de $20 \log_{10} |H(\omega)|$ (unités dB) et de la phase $\arg(H(\omega))$ en fonction de $\log_{10}(\omega)$.

2°/Exemple : $H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$

donc $G(\omega) = |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}$

et $\arg[H(\omega)] = -\arctan\left(\frac{\omega\tau}{1}\right)$

on calcule le gain en dB : $G_{dB} = 20 \log |H(\omega)|$

cod $G_{dB} = 10 \log |H(\omega)|^2$

$G_{dB} = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \right) = -10 \log (1 + \omega^2\tau^2)$

(III.16)

Pour comprendre le fonctionnement du système, on observe sa réponse à des fréquences caractéristiques comme $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow +\infty$.

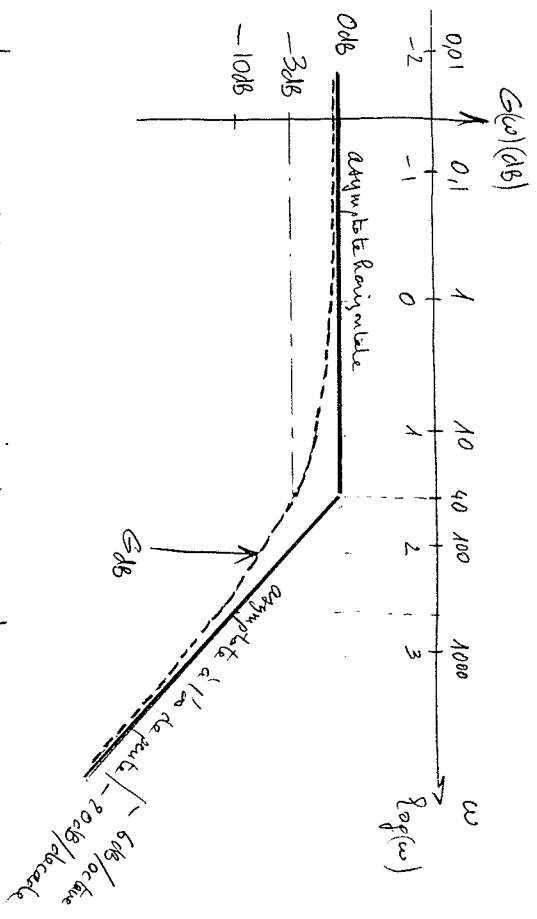
⊕ $\lim_{\omega \rightarrow 0} G = 0 \rightarrow$ On dit donc que le gain possède une asymptote horizontale à l'origine. (G tend vers une constante qd ω tend vers 0).

⊕ $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G = -10 \log(\omega^2\tau^2)$
 $= -10 \log \tau^2 - 10 \log \omega^2 = -10 \log \tau^2 - 20 \log(\omega)$
 qui est l'équation d'une droite en fonction de $\log(\omega)$ de pente -20 et de valeur $(-10 \log \tau^2)$ qd $\log(\omega) = 0$ (ordonnée à l'origine).

lorsque ω varie d'un facteur 10 (une décade) la droite varie de $-20 \log(10)$ cad de -20 dB. On dit que la droite possède une pente de -20 dB/décade. lorsque ω varie d'un facteur 2 (une octave) la droite varie de $-20 \log(2)$ cad de -6 dB. On dit que la droite possède une pente de -6 dB/octave.

On dit finalement que le gain possède une amplitude à l'infini de pente $-20\text{dB}/\text{decade}$

ou de $-6\text{dB}/\text{octave}$.



III.17

Les asymptotes se croisent quand :

$$-10 \log(\omega^2 \tau^2) = 0 \text{ cad quand } \omega = \frac{1}{\tau}$$

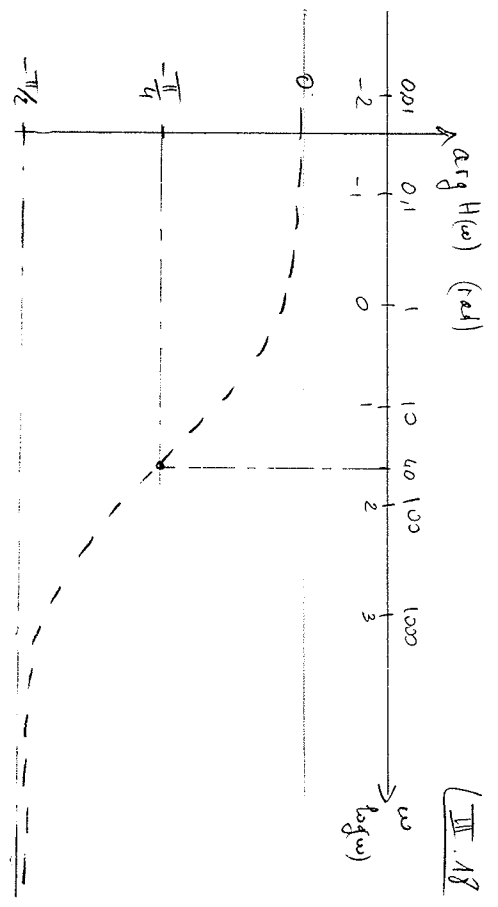
$$\text{Si } \tau = 0,025 \Rightarrow \omega = 40$$

la valeur de G en ce point est :

$$\begin{aligned} G(\omega = \frac{1}{\tau}) &= 20 \log \left| \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 \tau^2}} \right|_{\omega = \frac{1}{\tau}} = -10 \log(1 + \omega^2 \tau^2) \Big|_{\omega = \frac{1}{\tau}} \\ &= -10 \log(2) \\ &= -3\text{dB} \end{aligned}$$

En ce qui concerne la phase de $H(\omega)$,

$$\arg(H(\omega)) = -\arctg(\omega \tau)$$



III.18

II. Diagramme de Nyquist

1/ Définition

On a vu en régime alternatif que le filtre modifie le signal à l'entrée, non seulement est multipliée par un gain $G(\omega) = |H(\omega)|$ et que sa phase est décalée de $\arg(H(\omega))$.

Le Diagramme de Nyquist consiste à représenter en coordonnées polaires le module et la phase de $H(\omega)$ en fonction de la fréquence.

2/ Exemple

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega \tau} \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \\ Y(\omega) &= -\arctg(\omega \tau) \end{aligned}$$

On peut soit déterminer l'équation du III.19

lien de $H(\omega)$ dans la plan complexe :

on a $\arg(\rho) = -\omega T$ d'où $H(\omega) = \frac{1}{1 - j\omega T}$

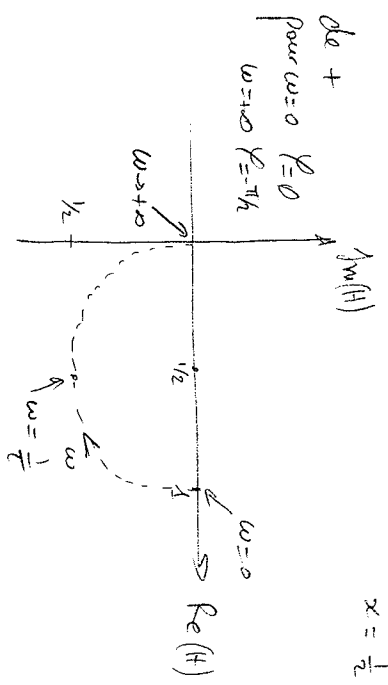
on note $x = \operatorname{Re}(H)$
 $y = \operatorname{Im}(H)$

et on a $x = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + j\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}$

$y = \operatorname{Im}\left(\frac{1 + j\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right) = \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$

et on a $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
 équation d'un cercle de centre

$x = \frac{1}{2}$ $y = 0$



Il est en général + simple de tracer point par point le diagramme Nyquist.

$\omega = 0$ $G = 1$ $\varphi = -\arctan(0) = 0$

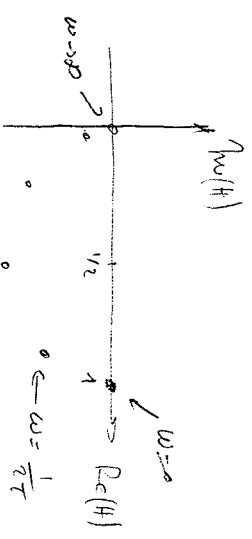
$\omega = \frac{1}{2T}$ $G = \frac{1}{\sqrt{1+0,25}} = 0,894$ $\varphi = -\arctan(0,5) = -26^\circ$

$\omega = \frac{1}{T}$ $G = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ $\varphi = -\arctan(1) = -45^\circ$

$\omega = \frac{2}{T}$... etc ...

$\omega \rightarrow \infty$ $G \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow -\arctan(\infty) = -90^\circ$

III.20



VIII Retard de phase - Temps de Propagation du Groupe

Il peut un signal alternatif $e(t) = E_0 \cos \omega t$

injecté dans un filtre $H(\omega) = G e^{j\varphi(\omega)}$

la sortie $a(t) = E_0 G \cos(\omega t + \varphi(\omega))$
 $= E_0 G \cos(\omega(t + \frac{\varphi(\omega)}{\omega}))$

On appelle retard de phase $T(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\omega}$.

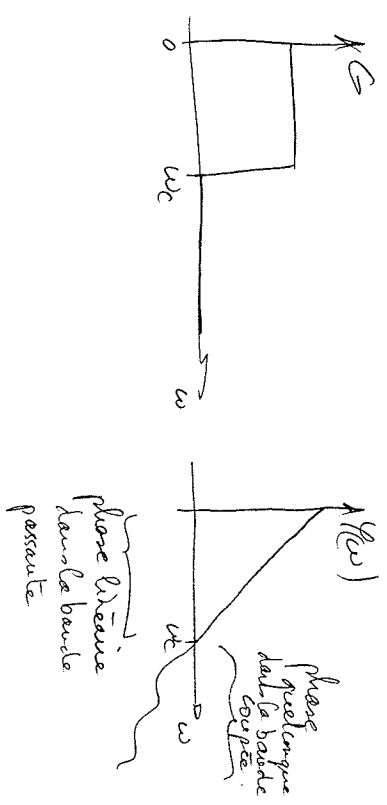
Quand un signal est composé de plusieurs fréquences, ce qui est souvent le cas, le retard de phase va être différent pour chaque fréquence composant le signal. Le signal en sortie du filtre n'aura donc d'être déformé si le retard de phase dépend de la fréquence.

Donc si $T = \frac{\varphi}{\omega} \neq \text{cste} \rightarrow$ déformation du signal à la traversée du filtre.

III. 21

Si on veut une $T = \text{cte}$ car
si la phase $\varphi(\omega)$ est linéaire en fonction de la
fréquence, alors le signal à la traversée du
filtre ne sera pas déformé.

Filtre idéal Parese



Exemple : a) signal carré périodique -

1) dans le cas d'un rpt linéaire où

$$T = \text{cte} \rightarrow \mathcal{N}(f) = a(f) \text{ de cste}$$

2) dans le cas d'un rpt linéaire où

$$T = f_0 T(\omega) \rightarrow \mathcal{N}(f) = a(f) \text{ déformé}$$

IV. SYSTEMES DU 1^{ER} ET DU 2ND ORDRE

IV Systèmes du 1^{er} et 2nd Ordre. IV.1.

1.3) Systèmes du 1^{er} Ordre.

Les facteurs du 1^{er} ordre ont pour des 5 formes suivantes :

$$\frac{K}{p} \quad ; \quad \frac{K}{1+Tp} \quad ; \quad \frac{KTp}{1+Tp} \quad ; \quad \frac{K(1+Tp)}{1+Tp} \quad ; \quad \frac{K(1+Tp)}{Tp}$$

Nous allons évaluer ici que la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1+Tp} \quad \text{facteur de transfert du 1^{er} ordre passe Bas.}$$

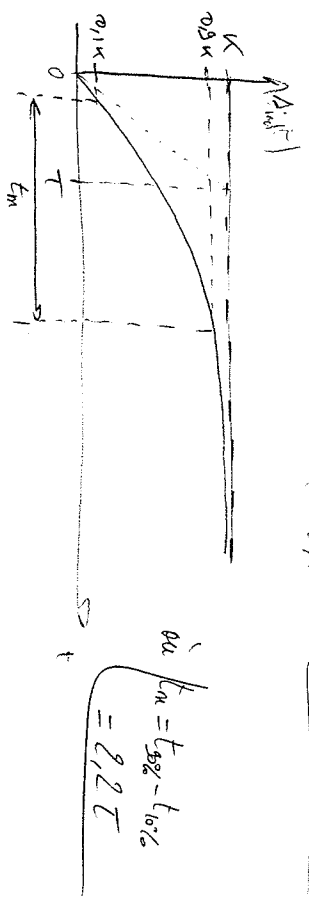
A) Réponse indicielle (réponse à une échelon).

$$e(t) = u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$$

$$\rightarrow \text{Si ind}(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1+Tp} \cdot \frac{1}{p}$$

$$= K \frac{1/T}{(\frac{1}{T} + p)}$$

d'où $P_{ind}(t) = K T^{-1} \cdot \left(\frac{1/T}{(\frac{1}{T} + p)} \right) = K (1 - e^{-t/T}) u(t)$



la réponse à 5% :

$$t? / A_1(t) = 0,95 K$$

$$\text{car } 1 - e^{-t/T} = 0,95$$

$$\Rightarrow t = -T \ln(0,05)$$

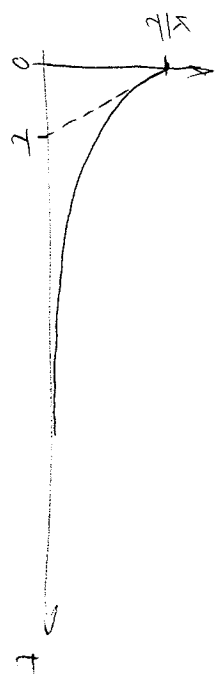
$$t \approx 3 T$$

B) Réponse impulsionnelle.

$$e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1$$

$$\rightarrow \text{Si imp} = H(p) = \frac{K}{1+Tp} = K \frac{1/T}{p + 1/T}$$

$$\rightarrow A_{imp}(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} u(t) \quad (\text{table m } T > 0)$$



C) Réponse Fréquentielle

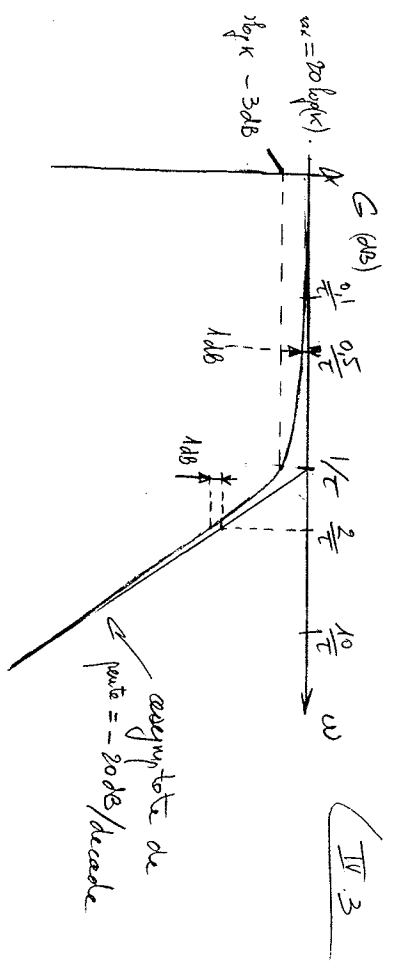
$$H(\omega) = H(p=j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$$

$$\textcircled{a} G(\omega) = 20 \log |H| = 20 \log(K) - 10 \log(1 + \omega^2 T^2)$$

asymptote en $\omega \rightarrow 0$: $G(\omega) \sim 20 \log(K) - 10 \log(\omega^2 T^2)$

car $G(\omega) \sim 20 \log(K) - 20 \log(T) - 20 \log(\omega)$

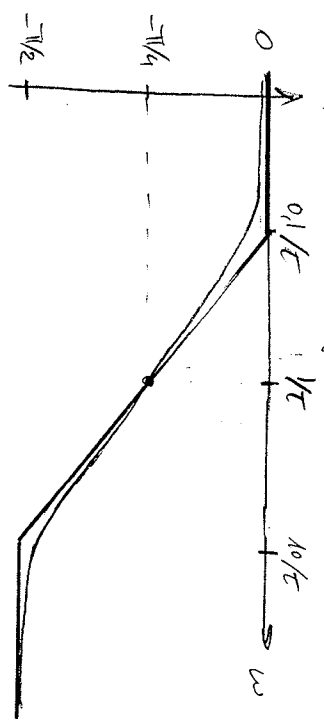
asymptote en $\omega \rightarrow \infty$: $G(\omega) \sim 20 \log(K)$



Les asymptotes ne coupent qd elles valent 20 log K car $\omega = \frac{1}{T}$

Phase de $H(\omega)$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega T)$$



Remarques :

Pour un filtre passe bas (ou haut) du 1^{er} ordre

* le gain est 1 dB en dessous de ses asymptotes à 1 octave en dessous ou à une octave au dessus de la pulsation de coupure à -3dB ($\omega = \frac{1}{T}$).

$$\text{cad } G\left(\frac{\omega}{2}\right) = G_{\text{max}} - 1 \text{ dB} \quad \text{ou } \omega = \frac{1}{T}$$

$$G(2\omega) = \text{asymptote} - 1 \text{ dB}$$

* il est 0,25 dB en dessous à 2 octaves, et sur les asymptotes à ...

207 Système du 2nd ordre

soit un système du type (passe bas)

$$H(p) = \frac{K}{\omega_N^2 + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1}$$

ou ω_N est appelée : pulsation naturelle

coefficient d'amortissement ($\zeta > 0$)

pôles de $H(p)$

$$\text{discriminant } \Delta = \left(\frac{2\zeta}{\omega_N}\right)^2 - 4 \frac{1}{\omega_N^2} = \frac{4}{\omega_N^2} (\zeta^2 - 1)$$

$$\text{si } \zeta > 1 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \exists 2 \text{ pôles } P_{1,2}$$

$$P_{1,2} = \omega_N \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

$$\text{si } \zeta = 1 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \exists 1 \text{ pôle double}$$

$$P_1 = -\zeta \omega_N$$

$$\text{si } \zeta < 1 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 2 \text{ pôles complexes}$$

$$P_{1,2} = \omega_N \left(-\zeta \pm j \omega_N \sqrt{1 - \zeta^2} \right)$$

A) $\zeta > 1$

$$\text{alors } H(p) = \frac{K \omega_N^2}{(p - P_1)(p - P_2)}$$

$$\text{ou } P_{1,2} = \omega_N \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

IV.4

a) Response unpolare

W. 5

$$S_{imp}(p) = H(p)$$

$$A_{imp}(t) = T L^{-1} \left(\frac{K \omega_N^2}{(p-p_1)(p-p_2)} \right)$$

$$= T L^{-1} \left[\frac{K \omega_N^2 (p_2 - p_1)}{(p-p_1)(p_2-p_1)(p_2-p_1)} \right]$$

$$= \frac{K \omega_N^2}{p_2 - p_1} T L^{-1} \left(\frac{p_2 - p_1}{(p-p_1)(p-p_2)} \right)$$

$$= \frac{K \omega_N^2}{2 \omega_N \sqrt{\zeta^2 - 1}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$= \frac{K \omega_N}{2 \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\gamma \omega_N t} \left(e^{\omega_N \sqrt{\zeta^2 - 1} t} - e^{-\omega_N \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right)$$

b) Response indicielle

$$S_{ind}(p) = H_{ind}(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{K \omega_N^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$\Rightarrow A_{ind}(t) = \frac{K \omega_N^2}{p_1 p_2} \left[1 - \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} \right]$$

OR $p_1 p_2 = \omega_N^2$

et $p_1 - p_2 = 2 \omega_N \sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$\Rightarrow A_{ind}(t) = K \left[1 - \frac{1}{2 \sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{p_2 t} - e^{p_1 t} \right) \right]$$

$$\Rightarrow A_{ind}(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\omega_N \zeta t}}{2 \sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{\omega_N \sqrt{\zeta^2 - 1} t} - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{-\omega_N \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right] \right]$$

W. 6

B) $\zeta < 1$

a) Response unpolare

$$A_{imp}(t) = \frac{K \omega_N}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\gamma \omega_N t} \sin[\omega_N \sqrt{1 - \zeta^2} t]$$

b) Response indicielle

$$A_{ind}(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\gamma \omega_N t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_N \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) \right]$$

ou $\phi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right)$

C) $\zeta = 1$

a) Response unpolare

$$S_{imp}(p) = \frac{K \omega_N^2}{(p-p_1)^2}$$

$$\Rightarrow A_{imp}(t) = K \omega_N^2 t e^{-\gamma \omega_N t}$$

$$A_{imp}(t) = K \omega_N^2 t e^{-\gamma \omega_N t}$$

b) Response indicielle

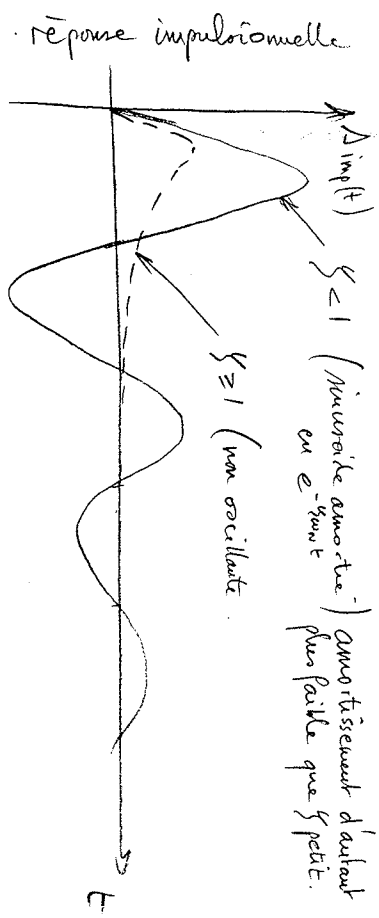
$$S_{ind}(p) = \frac{K \omega_N^2}{p(p-p)^2} = \frac{1}{p} S_{imp}(t) \quad (IV.7)$$

$$A_{ind}(t) = \int_0^t A_{imp}(t) dt = \int_0^t K \omega_N^2 t e^{-\gamma \omega_N t} dt$$

(par partie $v = t$; $v' = e^{-\gamma \omega_N t}$)

$$\rightarrow A_{ind}(t) = K [1 - e^{-\omega_N t} - \omega_N t e^{-\omega_N t}]$$

D) Traces des Réponses Temporelles

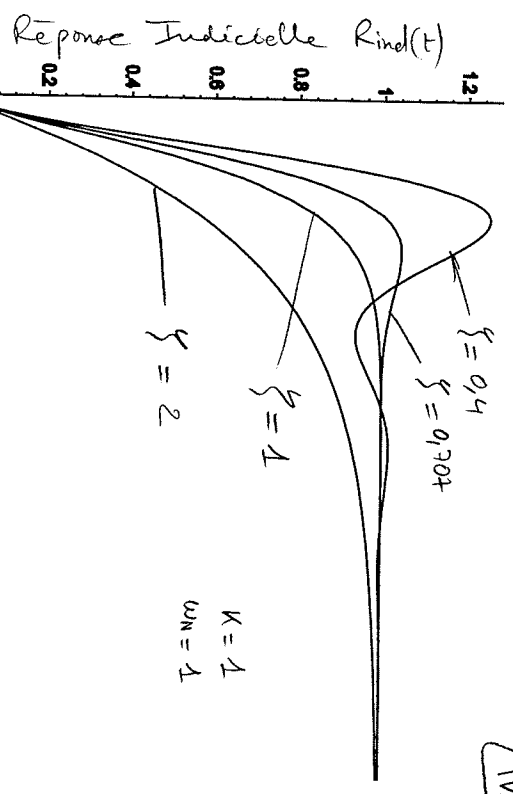


$\zeta < 1$ réponse en $\sin(\omega_N t + \phi)$

$$\text{avec } \omega_{sp} = \omega_N \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{\omega_N}{T_p}$$

T_p est la pseudo période

$\zeta \geq 1$ réponse non oscillante



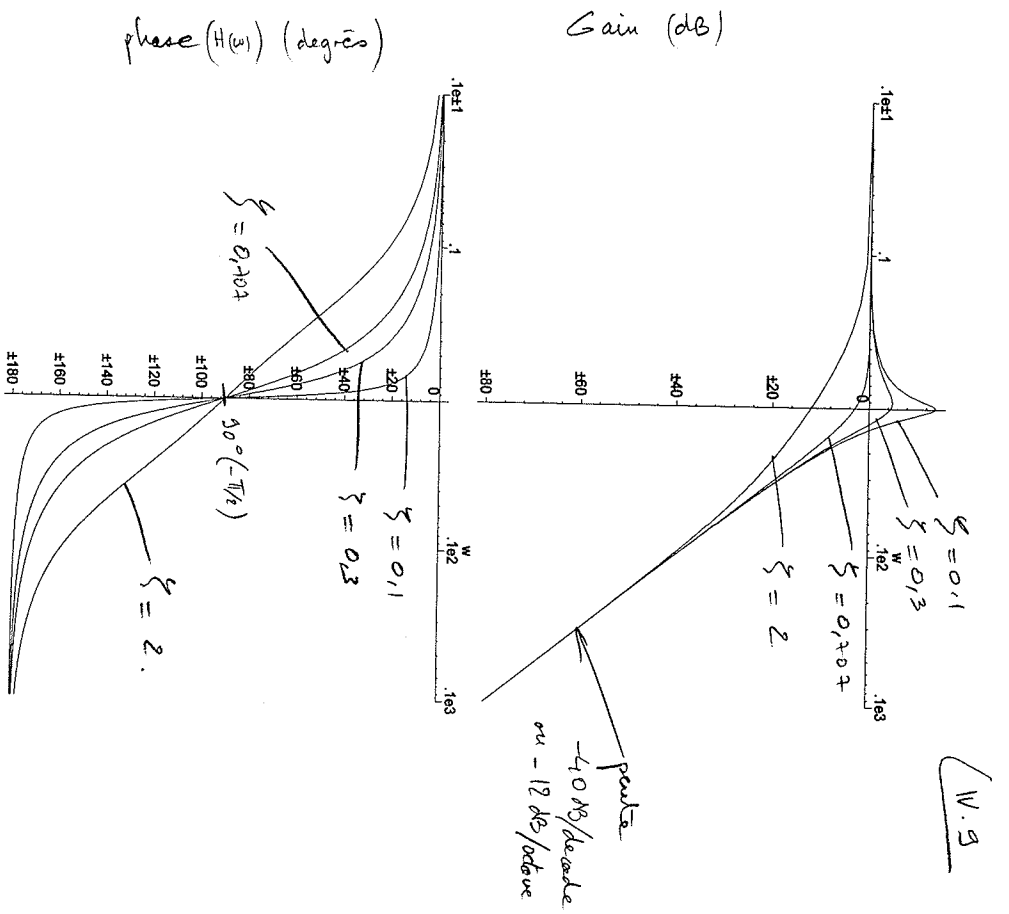
(IV.8)

- oscillatoire pour $\zeta < 0.707$
- décroissant présent pour $\zeta \geq 1$

E) Réponses Fréquentielles

$$H(\omega) = H(p=j\omega) = \frac{K}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_N^2}) + j \frac{2\zeta\omega}{\omega_N}}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{K^2}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_N^2})^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_N^2}}$$



$$\text{Arg}(H(\omega)) = -\arctan\left[\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right]$$

Présence d'une résonance au Gain

si $\zeta < 0,707$ la gain présente une résonance pour la pulsation $\omega_0 = \omega_N \sqrt{1 - \zeta^2}$ d'amplitude $G_r = \frac{K}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$

Remarque
On voit que G et $\text{arg}(H(\omega))$ présente des points d'inflexion multiples dès que $\zeta \gg 1$. En effet si $\zeta > 1$ la P_1 et le zéro sont réels.

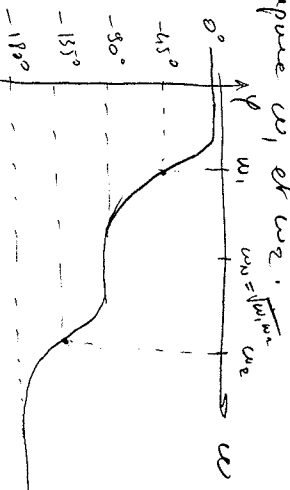
$$H(p) = \frac{K \omega_N^2}{(p - P_1)(p - P_2)} \quad \text{ou} \quad P_{1,2} = \omega_N(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \in \mathbb{R}, \omega_{1,2}$$

donc la réponse fréquentielle n'est :

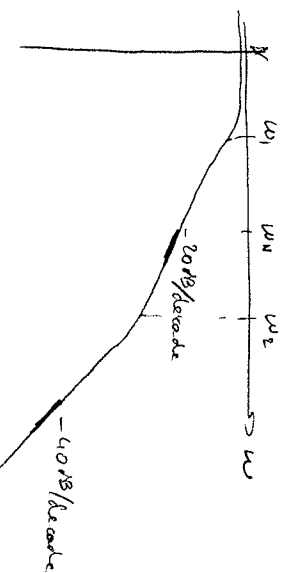
$$H(p) = K \omega_N^2 \frac{1}{(\omega_1 - j\omega)} \frac{1}{(\omega_2 - j\omega)}$$

$$\text{ou} \quad \omega_{1,2} = \omega_N(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

quand ζ est suffisamment grand devant 1, ω_1 et ω_2 deviennent très distants. la phase présente alors plusieurs points d'inflexion caractéristiques aux 2 pulsations de coupure ω_1 et ω_2 .



Et le gain aura :



Filtrage Analogique

Partie 2

Le Filtrage

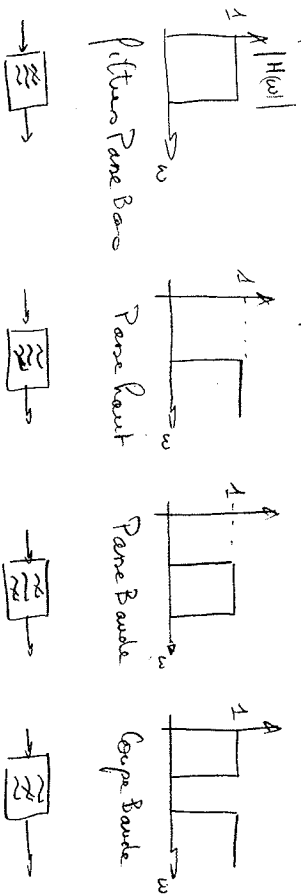
V. GABARITS - NORMALISATION - TRANSPOSITION

T. Ditchi

Caractéristiques - Transformations IV.1

I) Filtrage Idéale

On classe les filtres selon la bande de fréquence qu'ils laissent passer :



Ces filtres, tels qu'ils sont tracés, ont idéalement des coupures - ont abruptes -

choisis la réponse impulsionnelle d'un filtre idéal passe bas tel que celui tracé ci-dessus.

Le module de $H(\omega)$ est forcément pair pour correspondre à un signal réel. On a donc



Filtre Passe Bas Idéale.

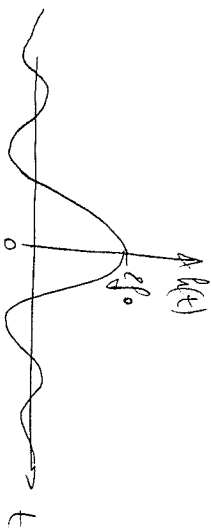
et l'argument doit être impair.

La réponse impulsionnelle $h(t)$ est la Transformée de Fourier inverse de la réponse fréquentielle.

On a donc $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$

IV.2

ce qui donne $h(t) = 2\omega_c \text{sinc}(2\pi\omega_c t)$.



Or cette réponse à une entrée $\delta(t)$ ($\delta \text{ est } \rightarrow 0$) n'est pas causale puisqu'elle commence avant que le système soit excité !

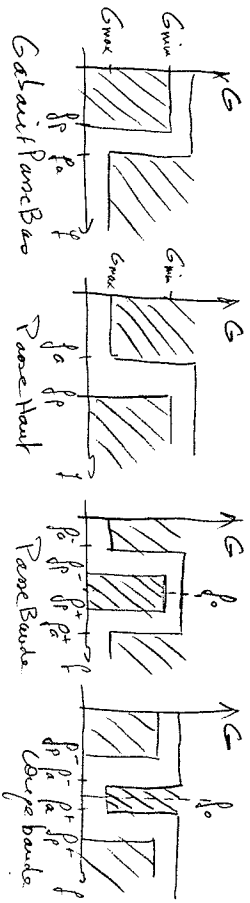
Témo en choisissant une autre phase de $H(\omega)$ que celle choisie ici ($\arg\{H(\omega)\} = 0$) telle qu'une phase linéaire ($\phi(\omega) = -a\omega$) qui permet de ne pas réformer les signaux, on obtient une réponse (niveau constant négatif) qui n'est toujours pas causale.

C'est la raison pour laquelle il est nécessaire de passer par l'intermédiaire de gabaits fabriqués à partir d'un câble de charges -

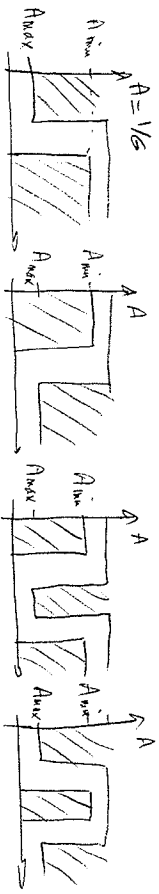
III Gabarit

1.3

Un gabarit définit des zones de tolérances avec lesquelles le jeu doit respecter certaines propriétés



ou en alternance :



où f_p est la dernière fréquence parante (pour un filtre Pans bas) qui n'entraîne pas de pertes.

f_0 est la première fréquence atteinte pour un filtre Pans bas

G_{min} est le jeu minimum que doit posséder le filtre dans la bande passante.

G_{max} est le jeu maximum dans la bande coupée.

A_{max} est l'atténuation maximum dans la bande passante.

A_{min} est l'atténuation minimum dans la bande coupée.

1.4

On définit la rélectivité R_e :

- filtre uniquement passe $\Rightarrow R_e = 1$
- filtre moins raide $\Rightarrow R_e < 1$

$$R_e = \frac{f_p}{f_0} \text{ pour un filtre pans bas } \in]0, 1]$$

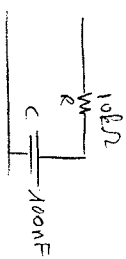
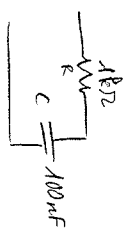
$$R_e = \frac{f_0}{f_p} \text{ pour un filtre pans haut } \in]0, 1]$$

$$R_e = \frac{f_p^+ - f_p^-}{f_0^+ - f_0^-} \text{ pour un filtre pans bande } \#$$

$$R_e = \frac{f_0^+ - f_0^-}{f_p^+ - f_p^-} \text{ pour un filtre coupe bande } //$$

II Normalisation

Il est commode de travailler avec des fréquences et des impédances normalisées de façon à pouvoir comparer les filtres entre eux et leur attribuer des caractéristiques. Ainsi, les filtres suivants ont des propriétés comparables :



$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp} = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

avec $\omega_c = 10^{14}$ pour le filtre de gauche et $\omega_c = 10^3$ pour le filtre de droite.

accepte leur fréquence de coupe qui est différente.

1.9 Normalisation de la fréquence (V.5)

On choisit une fréquence de référence f_0 .

Pour un filtre passe bas (ou passe haut) la fréquence de référence est la dernière (ou première) fréquence paramètre $f_0 = f_p$.

On définit alors la fréquence normalisée :

$$|p_n = \frac{f}{f_0}$$

la pulsation normalisée :

$$|w_n = \frac{w}{w_0} \quad (\text{à ne pas confondre avec } w_n \text{ la pulsation naturelle)}$$

$$|p_n = \frac{p}{w_0}$$

Pour un filtre passe bande (ou coupe bande) la fréquence de normalisation est choisie comme étant la fréquence centrale de la bande passante (coupée) notée f_0 et sera défini plus loin dans ce cours.

La bande passante (coupée) notée f_0 et sera défini plus loin dans ce cours.

La bande passante (coupée) notée f_0 et sera défini plus loin dans ce cours.

La bande passante (coupée) notée f_0 et sera défini plus loin dans ce cours.

$$|H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{w_0}}$$

On est la pulsation de coupure à -3dB car

$$|G(w) = 20 \log |H(w)| = -3dB$$

$$\text{et } G_{max} = 0dB$$

- Si on choisit la pulsation de référence (V.6)

$$w_0 = w_c \quad \text{alors} : \quad p_n = \frac{p}{w_0} = \frac{p}{w_c}$$

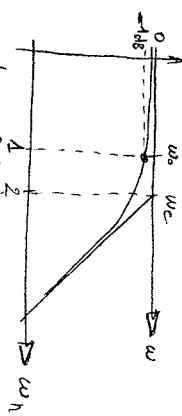
$$\text{d'où } |H(p) = \frac{1}{1 + p_n}$$

- si on choisit comme pulsation de référence

w_0 telle que $G(w_0) = G_{max} - 1dB = -1dB$

cad $w_0 \approx \frac{w_c}{2}$ alors : $p_n = \frac{p}{w_0} = \frac{2p}{w_c}$

$$\text{d'où } |H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2p}{w_c}}$$



Remarque : La pulsation de référence d'un filtre passe bas (ou haut) n'est pas forcément la pulsation de coupure à -3dB !

2.9 Normalisation des impédances

On choisit une impédance de normalisation notée R_0 .

Cette impédance peut être par exemple l'impédance de sortie des générateurs.

On définit alors l'impédance normalisée :

$$|z = \frac{Z}{R_0}$$

a) Résistance :

$$R \rightarrow r = \frac{R}{R_0}$$

b) Inductances V.7

$$Z_L = j\omega L \rightarrow Z_c = \sqrt{\frac{L\omega}{R_0}} = j \frac{L\omega}{R_0} \frac{\omega}{\omega}$$

cad $Z_c = \sqrt{L\omega_n}$ où $\rho = \frac{L\omega_0}{R_0}$

où ρ est la valeur normalisée de l'inductance
($\rho \equiv$ inductance normalisée)
et ω_n est la pulsation normalisée

c) Condensateurs

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow Z_c = \frac{1}{jC\omega R_0} = \frac{1}{jC R_0 \omega \omega}$$

cad $Z_c = \frac{1}{jC\omega_n}$ où $c = C R_0 \omega_0$

où c est la valeur normalisée de la capacité
($c \equiv$ capacité normalisée)

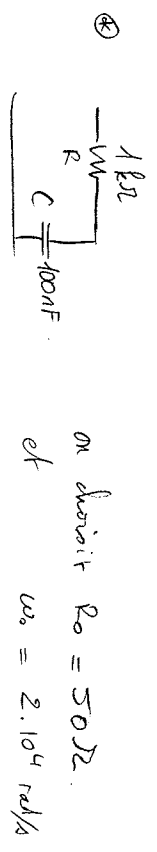
d) R.R.0

On a donc : $\sqrt{r = \frac{R}{R_0}}$; $\sqrt{\rho = \frac{L\omega_0}{R_0}}$; $\sqrt{c = C R_0 \omega_0}$

Si on pose : $\left[C_0 = \frac{1}{R_0 \omega_0} \right]$ et $L_0 = \frac{R_0}{\omega_0} = R_0^2 C_0$

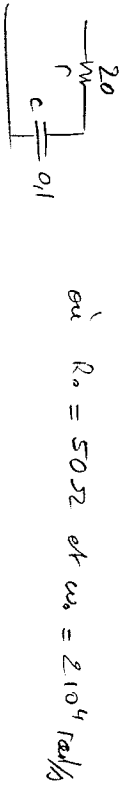
on a $R = r R_0$; $\sqrt{C = c C_0}$ et $L = \rho L_0 = \rho R_0^2 C_0$

e) Exemple de normalisation V.8



alors $r = \frac{R}{R_0} = 20$; $c = C R_0 \omega_0 = 0,1$

Le filtre normalisé revient :



et la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{1 + r p} = \frac{1}{1 + r R_0 \frac{c}{R_0 \omega_0} p}$$

cad $H(p) = \frac{1}{1 + r c p_n} = \frac{1}{1 + 2 p_n}$

Remarque :

Le filtre a été ici normalisé à une pulsation $\omega_0 = 2 \times 10^4$ rad/s cad à une fréquence à laquelle le filtre atténue de 3dB

(-6dB/octave \rightarrow -6dB pour l'asymptote + 1dB pour l'asymptote \rightarrow atténuation de 3dB)
La preuve est que à $p_n = 1$

$$G = -20 \log \sqrt{1+4} = -20 \log \sqrt{5} \approx -7 \text{ dB}$$

donc ici filtre normalisé à -7dB

f) Exemple de dénormalisation (V.9)

Soit un filtre normalisé à $\omega_0 = 10^{-1} \text{ rad/s}$
avec une impédance de normalisation $R_0 = 10^5 \Omega$.



$$\Rightarrow R = r R_0 = 100 \Omega$$

$$C = \frac{c}{R_0 \omega_0} = 0,2 \text{ F}$$

donc filtre dénormalisé mais qui a les mêmes propriétés que le filtre normalisé (décalage de freq):



3°) Transposition de fréquence

a) Règle des yeux:

On réalise fabriquer des filtres Passes Hauts Passes Basse ou Coque Basse dont le comportement est connu parce que identiques à celui de filtres passe Bas catélogues.

b) Transposition Passes Bas \rightarrow Passes Hauts.

α) Principe:

En remplaçant les capacités par des inductances et les inductances par des capacités.
On transpose un passe bas en passe haut.

par exemple



(V.10)

β) Transposition de la fonction de transfert

* On transpose P_n en $1/P_n$ dans la fonction de transfert normalisée ainsi:

$$Z_c = L p_n \rightarrow \frac{L}{p_n} = \frac{1}{\frac{1}{L} p_n} = \frac{1}{c' p_n}$$

$$\rightarrow \text{---} \parallel \text{---} \frac{c'}{L}$$

$$\frac{1}{Z_c} = \frac{1}{L p_n} \rightarrow \frac{c}{p_n} = \frac{1}{L} p_n = \frac{1}{L p_n}$$

$$\rightarrow \text{---} \parallel \text{---} \frac{1}{L}$$

et la fonction de transfert d'un filtre passe bas devient celle d'un passe haut.

ex: $H(p_n) = \frac{1}{1 + \frac{p_n}{Q}}$ se transforme en

$$H(p_n) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2p_n}} = \frac{2p_n}{1 + 2p_n} \text{ qui est le}$$

Passive de transfert normalisée d'un passe haut.

* On peut aussi Passes Hauts passe bas non normalisée de pulsation ω_0 (dernière pulsation paramètre à $G \text{ min}$) à un filtre passe haut.

de pulsation ω_0 (première fréquence paramètre ω_0 à G_{min}) en appliquant la transformée :

$$P \rightarrow \omega_0 \frac{\omega}{p}$$

Ex: Soit un filtre passe-bas

$$H(p) = \frac{1}{1+10p} \quad \text{ayant une pulsation } \omega_p = 0,1 \quad \text{à } G_{min} = -3 \text{ dB}$$

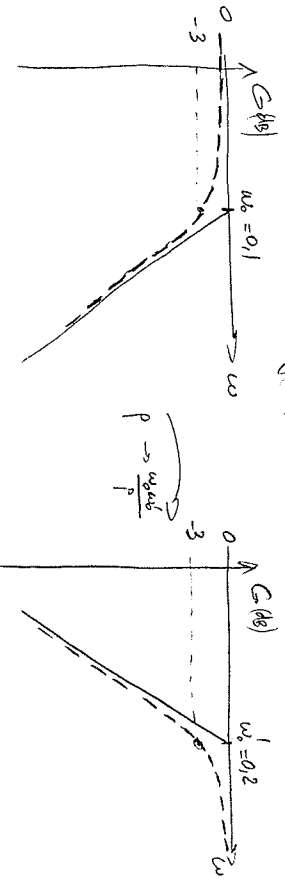
On peut alors transposer ce filtre en passe-haut possédant une pulsation $\omega_p' = 0,2$ à $G_{min} = -3 \text{ dB}$

$$\begin{aligned} \text{par : } H'(p) &= H\left(\frac{\omega_0 \omega}{p}\right) = \frac{1}{1+10 \frac{\omega_0 \omega}{p}} = \frac{1}{1+10 \frac{\omega_0 \omega}{p} + \frac{0,2}{p}} \\ &= \frac{5p}{1+5p} \quad \text{filtre passe-haut} \end{aligned}$$

et on vérifie qu'à $p = j\omega_0 = j0,2$ le filtre possède bien un gain $= G_{min} = -3 \text{ dB}$ car en effet :

$$H'(j0,2) = \frac{1}{1+j} \Rightarrow G' = 10 \log\left(\frac{1}{1+1}\right)$$

$$\text{c'est } G' = 10 \log\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \text{ dB}$$



1) Transposition des Sabotés

Ex: Prenons par exemple le filtre passe-bas d'ordre 2

$$\text{normalisé : } H(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 1} \quad \text{normalisé}$$

Sa réponse fréquentielle et son gain valent :

$$H(\omega_n) = \frac{1}{(1-\omega_n^2)^2 + 2j\omega_n} \quad \text{et } G_n = -10 \log(4\omega_n^2 + (1-\omega_n^2)^2)$$

à $\omega_n = 1$ nm gain vaut : $G_n(\omega_n=1) = -10 \log(4) = -6 \text{ dB}$

et $\omega_n = 10$ nm gain vaut : $G_n(\omega_n=10) \approx -4 \text{ dB}$.

Après transposition en passe-haut on trouve :

$$H'(p_n) = H(1/p_n) = \frac{1}{\frac{1}{p_n^2} + \frac{2}{p_n} + 1} = \frac{p_n^2}{1 + 2p_n + p_n^2}$$

nm Gain $G'(\omega_n) = 10 \log(\omega_n^4) - 10 \log[(1-\omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2]$

à $\omega_n = 1$ $G'(\omega_n=1) = -6 \text{ dB}$

à $\omega_n = 1/10$ $G'(\omega_n=0,1) = -40 - 10 \log[0,93^2 + 0,04] \approx -4 \text{ dB}$

On constate donc que le gain des filtres par transposition nmt conservés :

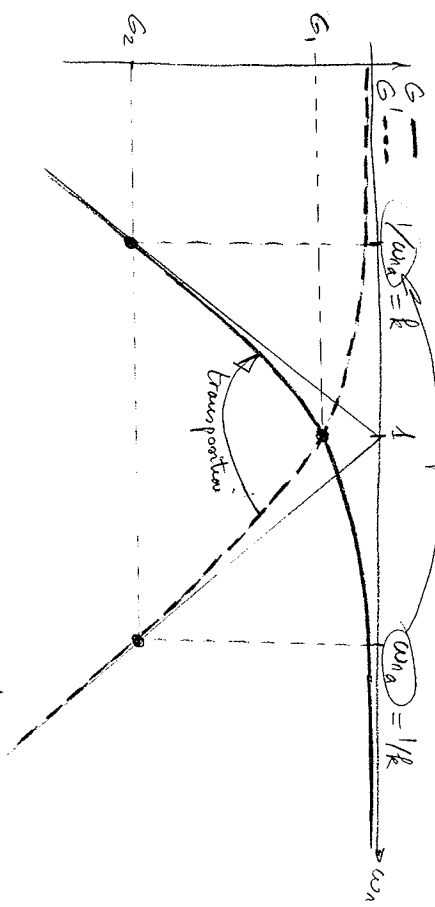
$$\begin{aligned} G(1) &= G'(1) \\ G(10) &= G'(0,1) \end{aligned}$$

Plus généralement on note que : V.13

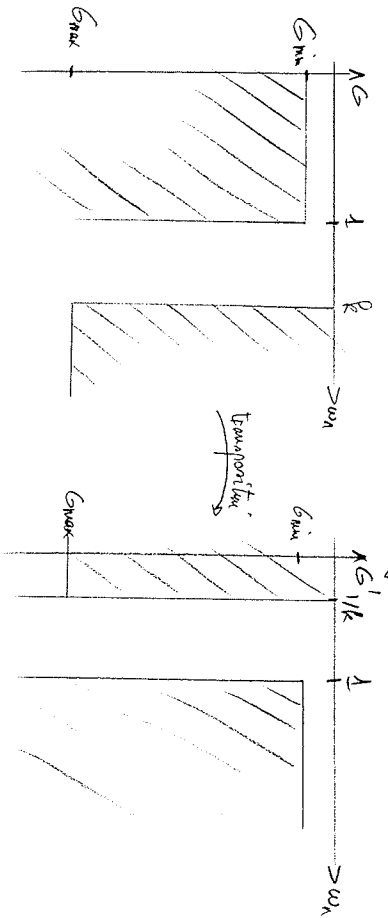
où $H(p) \xrightarrow{p \rightarrow \tau s} H(p')$
 (plan) (plan)

alors $G(\omega_n) = G'(1/\omega_n)$

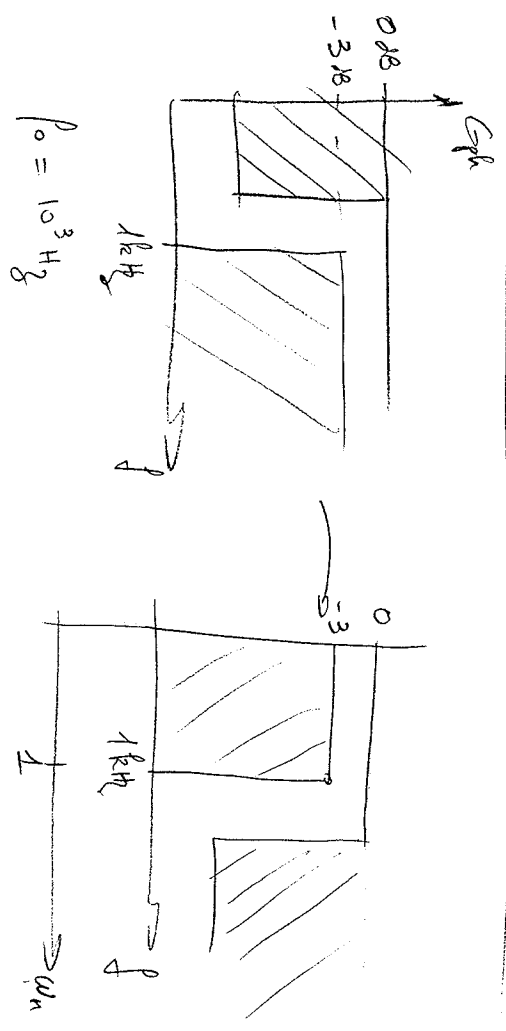
ce qui ne traduit par la transposition de Gain suivante :



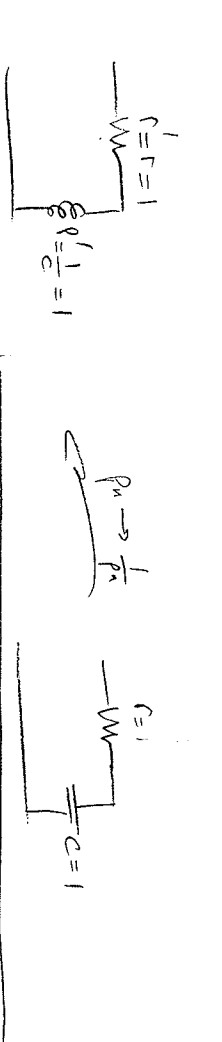
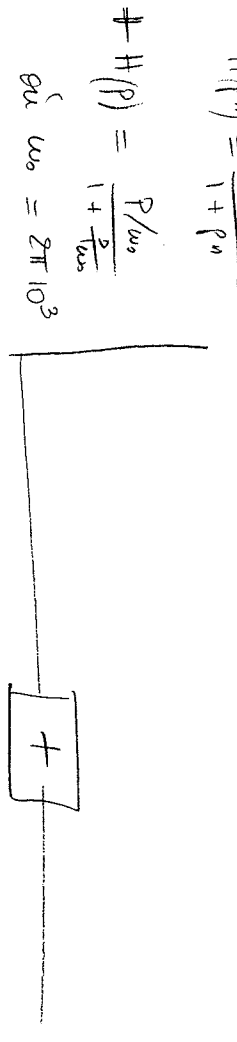
Et le Gabarit se conserve également :



Exemple de fab d'une filtre passe haut



$H(p) = \frac{1}{1 + 1/p_n}$
 $H(p_n) = \frac{1}{1 + p_n}$
 (Passe haut normalisée à $\omega_n = 1$)



$R'_0 = 10^3 \Omega$
 $R'_0 = 10^3 \Omega$
 $L'_0 = \frac{R'_0}{\omega_n} = \frac{10^4}{2\pi \cdot 10^3} = 1,6 \text{ H}$

8) Exemple de fabrication d'un filtre passe bas V.14

On désire synthétiser un filtre τ Rank de
 1^{er} ordre de coupure à -3dB de $f_p = 1\text{kHz}$
 d'ordre 1 ...

On part pour cela d'un filtre passe bas d'ordre 1
 normalisé à -3dB : $H_p(p) = \frac{1}{1+p}$ ($G_{(0)} = -3\text{dB}$)

On pratique la transformation $p \rightarrow 1/p_n$

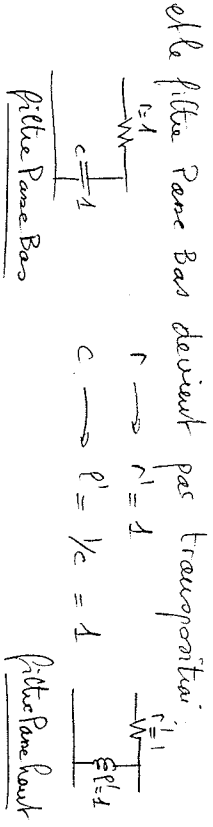
$$H_{pb}(p_n) = H_p(1/p_n) = \frac{1}{1+1/p_n} = \frac{p_n}{1+p_n}$$

qui à $p_n = 1$ possède bien un gain $G_{pb}(w=1) = -3\text{dB}$,
 puis on le dénormalise à la fréquence $f_p = 1\text{kHz}$

Par cela on remplace p_n par $\frac{p}{\omega_p}$ ou $\omega_p = 2\pi f_p$

$$H_{pb}(p) = \frac{p/\omega_p}{1+p/\omega_p} = \frac{p}{\omega_p + p} = \frac{f \omega}{2\pi f_p + j\omega}$$

dont le gain vaut : $G_{pb}(w) = 10 \log(w^2) - 10 \log(\omega_p^2 + w^2)$



et on dénormalise :

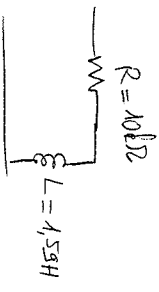
V.15

$R_0 = 10\text{k}\Omega$ et $\omega_0 = \omega_p = 2\pi \cdot 1\text{kHz}$

$r^1 \rightarrow R^1 = r^1 R_0 = 10\text{k}\Omega$

$p^1 \rightarrow L^1 = \frac{R^1}{\omega_0} = \frac{10^4}{2\pi \cdot 10^3} = 1,59\text{H}$ (!!! top grand)

ce qui donne le filtre passe bas :

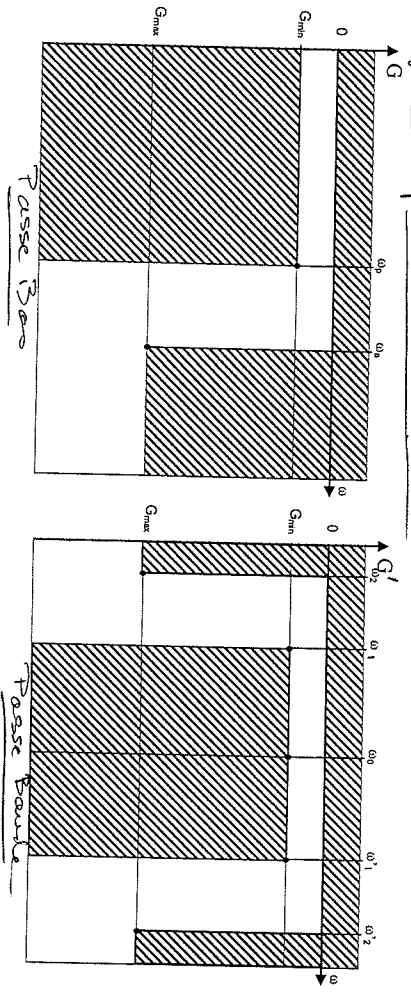


Rem. On peut remarquer que la transformation transfère
 une capacité en une inductance, ce que n'est
 pas recommandé à de faibles fréquences.

l'exemple ci dessus nécessite une inductance
 de 1,59 Henry, ce qui est une valeur très
 importante et qui correspond à une bobine
 très encombrante et probablement coûteuse.
 le même filtre à une fréquence $f_p = 100\text{kHz}$
 donnerait une inductance de 15,9nH, ce
 qui est bien plus raisonnable -

1) Transposition de Gabaix

V.17



Pour savoir comment transposer le gabaix du passe Bas en Gabaix Passe Bande, il est nécessaire d'imposer que celui-ci conserve les propriétés du filtre Passe Bas -

i) On dérive donc que : $|H(j\omega_p)| = |H'(j\omega'_1)| = |H(j\omega_1)|$ (1)
 et $|H(j\omega_s)| = |H'(j\omega'_2)| = |H(j\omega_2)|$ (2)

ω_1 et ω'_1 sont donc relatifs de l'équation :

$\omega / |H(j\omega_p)| = |H'(j\omega'_1)|$
 or $H'(j\omega'_1) = H(j\omega + \frac{\omega_0^2}{j\omega'})$ donc $\omega / |H(j\omega_p)| = |H(j\omega + \frac{\omega_0^2}{j\omega'})|$

ω_1 et ω'_1 sont donc relatifs de :

$\omega / \pm j\omega_p = j\omega + \frac{1}{j\omega} = j(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}) \pm \text{car } |H(j\omega_p)| \text{ est pair}$
 cas $\pm \omega_p = \omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}$
 cas $\omega^2 \pm \omega_p \omega - \omega_0^2 = 0$

Les solutions ω_1 et ω'_1 sont

V.18

$$\frac{\pm \omega_p \pm \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

donc 2 solutions seulement sont possibles -

$\omega_1 = \frac{-\omega_p + \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_0^2}}{2}$

et $\omega'_1 = \frac{+\omega_p + \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_0^2}}{2}$

et on a :

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega'_1}$$

$$\text{et } \omega'_1 - \omega_1 = \omega_p$$

c'est à dire que la Pente Passe Bande est "centré" sur ω_0 ou nous "géométrique"

et la Bande Passe relative B s'écrit :

$B = \frac{\omega'_1 - \omega_1}{\omega_0}$ ad $B = \frac{\omega_p}{\omega_0}$

ii) De la même manière on montre que :

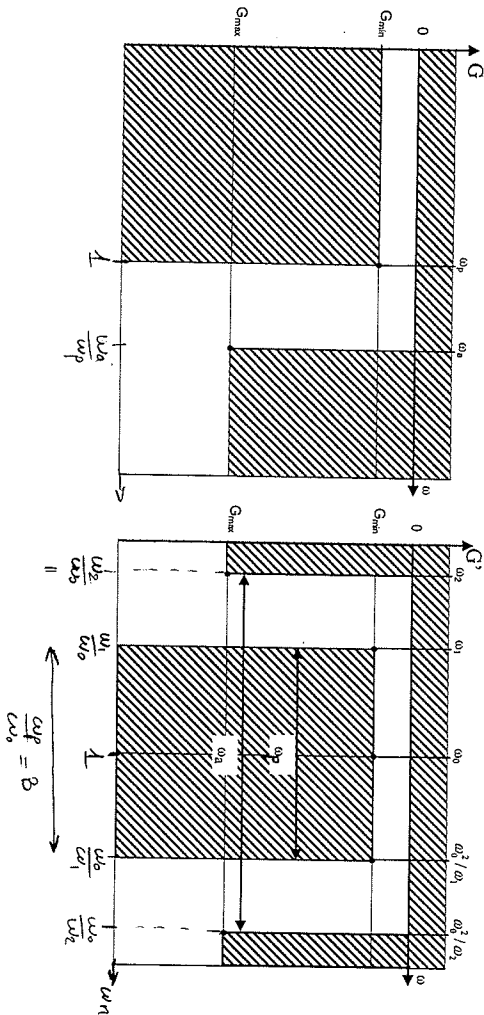
$\omega_2 = \frac{-\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 + 4\omega_0^2}}{2}$
 $\omega'_2 = \frac{\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 + 4\omega_0^2}}{2}$

cas :

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_2 \omega'_2}$$

$$\omega_a = \omega'_2 - \omega_2$$

La transposition du Gabarit est due réseau par la figure suivante :



2) Transposition "Passes Basses" \rightarrow "Passes Bandes", V.20

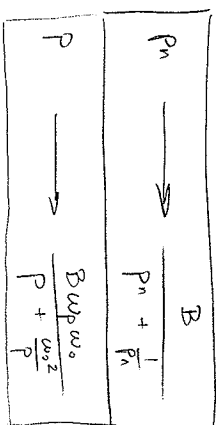
1) Principe

Cellules Passes Basses \rightarrow Cellules Passes Bandes

$$c \frac{1}{s} \rightarrow \frac{1}{s} c'$$



2) Transposition



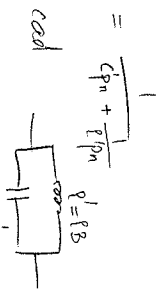
où B = Bande coupée relative.
 $B = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2}$

$$c \frac{1}{s} \rightarrow z_c = \frac{1}{cPn} \rightarrow \frac{Pn + \frac{1}{Pn}}{c} = \frac{1}{Bc} Pn + \frac{1}{Bc Pn}$$

$$= l' Pn + \frac{1}{c' Pn}$$

$$c'ad \quad \frac{1}{c' Pn} = \frac{1}{Bc}$$

$$l'ad \quad zc = l' Pn \rightarrow \frac{1}{Pn + \frac{1}{Pn}} = \frac{1}{\frac{Pn}{B} + \frac{1}{B Pn}}$$



On transforme bien les éléments du pole-zero en (V.21)
 élément de coupe bande.

On choisira arbitrairement, $B = \frac{\omega_p}{\omega_0}$

où $\omega_p =$ dernière pulsation présente au Pole-Zero

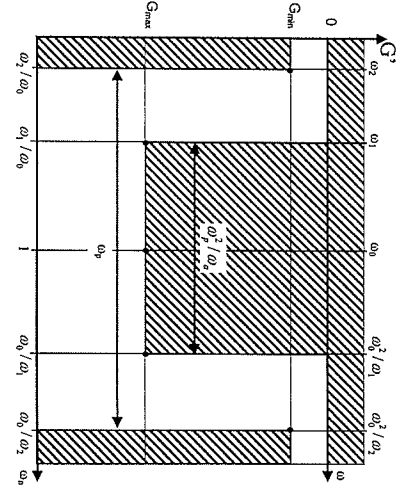
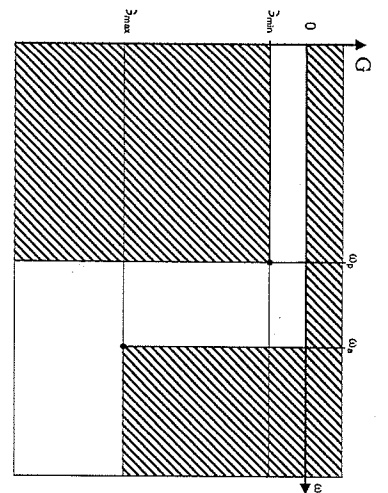
$\omega_0 =$ pulsation centrale du Coupe Bande.

Y) Transposition du Sabarit

de la même manière que pour le pole-zero

on trouve que :

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_2' - \omega_1' &= \omega_p & \text{et} & \quad \omega_2' \omega_1' = \omega_0^2 \\ \omega_1' - \omega_0' &= \frac{\omega_p^2}{\omega_2'} & \text{et} & \quad \omega_1' \omega_0' = \omega_0^2 \end{aligned} \right.$$



VI. CALCUL DE LA FONCTION DE TRANSFERT
 A PARTIR DU GAIN

Recherche de $H(p)$ connaissant $|H(\omega)|$. (VI.1)

I) Quelques propriétés de la réponse fréquentielle



Le système est caractérisé par l'équation différentielle suivante :

$$b_n \frac{d^n \lambda}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} \lambda}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 \lambda = a_m \frac{d^m e}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 e$$

où b_i et $a_i \in \mathbb{R}^+$ et sont constants.

La réponse fréquentielle $H(j\omega)$ s'écrit :

$$H(\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{a_m (j\omega)^m + \dots + a_0}{b_n (j\omega)^n + \dots + b_0} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \in \mathbb{C}$$

$$|H(j\omega)| = b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_n(j\omega)^n$$

$$= b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 + \dots + j\omega [b_1 - b_3 \omega^2 + b_5 \omega^4 + \dots]$$

$$= \underbrace{D_1(\omega^2)}_{\text{paireurs}} + j\omega \underbrace{D_2(\omega^2)}_{\text{impaireurs}}$$

et D_1 et D_2 sont des polynômes réelles

de même $N(j\omega) = N_1(\omega^2) + j\omega N_2(\omega^2)$

b) $H(j\omega) = \frac{N_1 - j\omega N_2}{D_1 - j\omega D_2} = \frac{N^*}{D^*} = H^*(j\omega)$ (VI.2)

c) $|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{N_1^2 + \omega^2 N_2^2}{D_1^2 + \omega^2 D_2^2}}$

donc $|H(j\omega)|$ est une fonction paire de ω et $|H(j\omega)|$ est une fonction de ω^2 uniquement

2°) Stabilité du système

On a vu que pour que le système soit stable, il faut que tous les pôles de la fonction de transfert (P.) soient à partie réelle négative.

3°) Systèmes à déphasage minimal

On remarque que pour que le système introduise un déphasage minimal, il faut que les zéros de la fonction de transfert soient à partie réelle négative

De plus, on remarque de la même manière que pour les pôles, qui s'ils sont sur l'axe imaginaire $j\omega$ est nul.

4° Pôles et zéros de $|H(j\omega)|^2$

VI.3

On suppose que le système est stable et à déphasage minimal

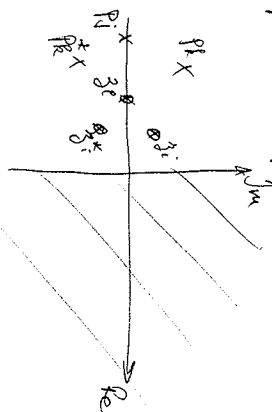
Soient P_1, P_1, \dots, P_n l'ensemble des pôles de $H(p)$

et z_1, z_1^*, \dots, z_m l'ensemble des zéros de $H(p)$

alors on peut écrire $H(j\omega)$ comme :

$$H(j\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega} = K \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - P_1)(j\omega - P_2) \dots (j\omega - P_n)}$$

et les pôles et les zéros sont localisés à gauche dans le plan complexe :

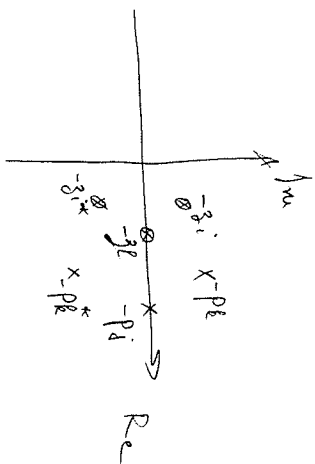


⊗ De plus

$$H^*(j\omega) = H(-j\omega) = K(-1)^{M+N} \frac{(j\omega + z_1) \dots (j\omega + z_m)}{(j\omega + P_1) \dots (j\omega + P_n)}$$

donc les pôles et zéros de $H^*(j\omega)$ sont les opposés de ceux de $H(j\omega)$,

ils sont donc répartis dans le plan complexe comme suit :

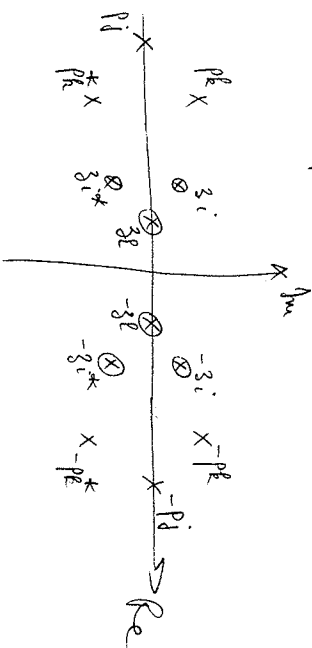


VI.4

⊗ le module de $H(j\omega)$ n'est :

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) H^*(j\omega) = H(j\omega) H(-j\omega)$$

et possède tous les zéros et tous les pôles de $H(j\omega)$ et de $H(-j\omega)$, qui se répartissent dans le plan complexe comme suit :



(On dit que les pôles et les zéros ont une symétrie quadrante)

II Calcul de $H(p)$ à partir du module de $|H(\omega)|$.

Supposons que l'on connaisse le module de

$$H(\omega) : |H(\omega)|$$

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H(j\omega)H(-j\omega)$$

V1.5

$$= H(p)H(-p) \Big|_{p=j\omega}$$

comme $|H(\omega)|$ est fonction de ω^2 uniquement,
 $|H(\omega)|^2$ peut également :

$$\text{donc } |H(p)H(-p)|_{p=j\omega} = |H(\omega)|^2$$

$$\text{c'est } H(p)H(-p) = |H(\omega)|^2 \Big|_{\omega = \frac{p}{j}} = |H(\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -p^2}$$

\uparrow recherché \uparrow connu

Pour déterminer $H(p)$, il faut donc, à partir de $|H(\omega)|^2$ remplacer ω^2 par $-p^2$, et on obtient l'expression de $H(p) \cdot H(-p)$.

On recherche alors tous les zéros et les pôles de $H(p)H(-p)$, on élimine la moitié d'entre eux qui ont une partie réelle positive (ceux qui seraient produits à $H(p)$), la moitié restante correspond à $H(p)$:

on calcule alors $H(p)$ grâce à ses pôles et ses zéros.

Exemple

V1.6

On cherche une fonction dont la phase coïncide pour $|H(\omega)|^2$.

$$\text{par ex : } |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+2\omega^2}$$

(ne pas oublier que $|H(\omega)|^2$ est forcément fonction de ω^2).

on remplace ω^2 par $-p^2$ dans $|H(\omega)|^2$ on

$$\text{obtient : } H(p)H(-p) = \frac{1}{1+2(-p^2)^2} = \frac{1}{1+2p^4}$$

Recherche des pôles et des zéros de $H(p)H(-p)$:

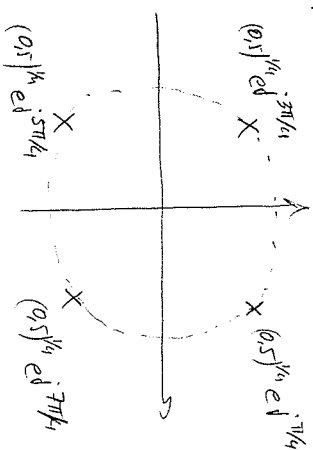
- il y a pas de zéros

- les pôles sont tels que $1+2p^4 = 0$

$$\text{c'est } p^4 = -0,5 = -0,5 e^{j2k\pi} = 0,5 e^{j(2k+1)\pi}$$

$$\text{c'est } p = (0,5)^{1/4} e^{j(2k+1)\pi/4}$$

les pôles se répartissent comme suit :



On ne conserve que les pôles à partie réelle négative, soit :

$$P_1 = (0.5)^{1/4} e^{j3\pi/4}$$

$$P_2 = (0.5)^{1/4} e^{j5\pi/4} = P_1^*$$

et on a $H(p) = \frac{K}{(p-P_1)(p-P_2)}$

car $H(p) = \frac{1}{p^2 + p(-P_1 - P_2) + P_1 P_2} = \frac{1}{p^2 + (2)^{1/4} p + \sqrt{0.5}}$

$$= \frac{K \sqrt{2}}{\sqrt{2} p^2 + 2^{1/4} p + 1}$$

Or $H(\omega)_{Max}$ doit être égal à 1 (voir expression de $H(\omega)^2$)

d'où $K = 1/\sqrt{2}$

d'où

$$H(p) = \frac{1}{\sqrt{2} p^2 + 2^{1/4} p + 1}$$

VII. FILTRES PROTOTYPES

1. INTRODUCTION

Selon l'application visée, on définit un cahier des charges. Celui-ci se présente comme une liste de fréquence avec les atténuations correspondantes recherchées. Le cahier des charges peut aussi préciser certaines propriétés sur le comportement en phase du système final. On traduit généralement ce cahier des charges en un gabarit qui donne après transposition et normalisation un gabarit passe bas normalisé. Il reste alors à choisir un type de filtre dont on connaît a priori certaines propriétés. Ces filtres connus et catalogués sont appelés "Filtres Prototypes".

Nous allons maintenant étudier certains de ces filtres prototypes. Nous étudierons successivement les filtres de :

- Butterworth
- Chebychev
- Legendre
- Cauer
- Bessel
- Gauss

11. FILTRES DE BUTTERWORTH

1°) Définition

Ces filtres sont caractérisés par une réponse la plus plate possible dans la bande passante. On les appelle ainsi "Maximally Flat" en anglais. Ce sont des filtres polynomiaux de la forme :

$$|H_m(\omega)|^2 = \frac{1}{a_m \omega^{2m} + a_{m-1} \omega^{2(m-1)} + \dots + a_1 \omega^2 + 1} = \frac{1}{A^2(\omega^2)} \text{ où } m \text{ est l'ordre du filtre}$$

2°) Calcul de H(ω)

Afin de rendre la réponse de ces filtres passe bas la plus plate possible dans la bande passante, on s'arrange pour que le maximum de dérivées de A² soient nulles en ω=0.

$$\left. \frac{\partial(A^2)}{\partial(\omega^2)} \right|_{\omega=0} = \left(m a_m \omega^{2(m-1)} + (m-1) a_{m-1} \omega^{2(m-2)} + \dots + 2 a_1 \omega^2 + a_1 \right) \Big|_{\omega=0} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2(A^2)}{\partial(\omega^2)^2} \right|_{\omega=0} = \left(m(m-1) a_m \omega^{2(m-2)} + (m-1)(m-2) a_{m-1} \omega^{2(m-3)} + \dots + 4 a_2 + a_2 \right) \Big|_{\omega=0} = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

et ainsi de suite jusqu'à la dérivée (m-1)^{ème} :

$$\left. \frac{\partial^{m-1}(A^2)}{\partial(\omega^2)^{m-1}} \right|_{\omega=0} = \left(m(m-1) \dots (2) a_m \omega^2 + (m-1)(m-2) \dots 2 a_{m-1} \right) \Big|_{\omega=0} = 0 \Rightarrow a_{m-1} = 0$$

en résumé : a₁ = 0 ; a₂ = 0 ; ; a_{m-1} = 0

ce qui donne le gain des filtres de Butterworth d'ordre m : $|H_n(\omega)|^2 = \frac{1}{a_n \omega^{2n} + 1}$

Il faut ensuite choisir le gain minimum G_{min} dans la bande passante pour normaliser le filtre. Les filtres de Butterworth sont en général normalisés à G_{min} = -3dB.

On cherche donc la pulsation de référence ω₀ telle qu'à ω = ω₀ |H_m|² vaille 1/2. cela donne $\omega_0^{2m} = \frac{1}{a_m}$

d'où en posant $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$|H_m(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega_n^{2m} + 1}$$

(Gain normalisé des filtres passe bas de Butterworth d'ordre m)

3°) Calcul de la fonction de transfert d'un filtre de Butterworth

Selon la méthode démontrée dans le chapitre précédent :

$$H(p_n) H(-p_n) = |H(\omega_n)|^2 \Big|_{\omega_n^2 = -p_n^2} = \frac{1}{(-p_n^2)^n + 1} = \frac{1}{(-1)^n p_n^{2n} + 1}$$

Il faut ensuite trouver les zéros (il n'y en a pas...) et les pôles de H(p_n) H(-p_n). Les pôles de H(p_n) H(-p_n) sont solutions de l'équation suivante :

$$(-1)^n p_n^{2n} + 1 = 0$$

Puis on ne garde que les pôles à partie réelle négative pour obtenir une fonction de transfert stable.

Ex :

Prenons l'exemple d'un filtre de Butterworth d'ordre 2 (m=2)

$$H(p_n) H(-p_n) = |H(\omega_n)|^2 \Big|_{\omega_n^2 = -p_n^2} = \frac{1}{(-p_n^2)^2 + 1} = \frac{1}{p_n^4 + 1}$$

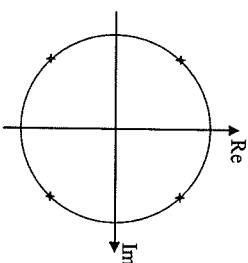
calcul des pôles :

$$p_n^4 + 1 = 0 \text{ cad } p_n^4 + 1 = 0 \text{ ou encore } p_n^4 = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)}$$

ce qui donne :

$$p_n = e^{j\pi/4} \quad e^{j3\pi/4} \quad e^{j5\pi/4} \quad e^{j7\pi/4} \text{ ou encore } p_n = e^{j(2k+1)\pi/4}$$

qui se répartissent dans le plan complexe comme suit :



On ne garde que les pôles à partie réelle négative pour obtenir une fonction de transfert H(p_n) d'un système stable (les 2 autres pôles sont associés à H(-p_n))

soient : $p_n = \begin{cases} e^{j3\pi/4} \\ e^{j5\pi/4} \end{cases}$

et on a :

ce qui donne après calcul

$$H(p_n) = \frac{1}{(p_n - e^{j3\pi/4})(p_n - e^{j5\pi/4})}$$

$$H(p_n) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}p_n + p_n^2}$$

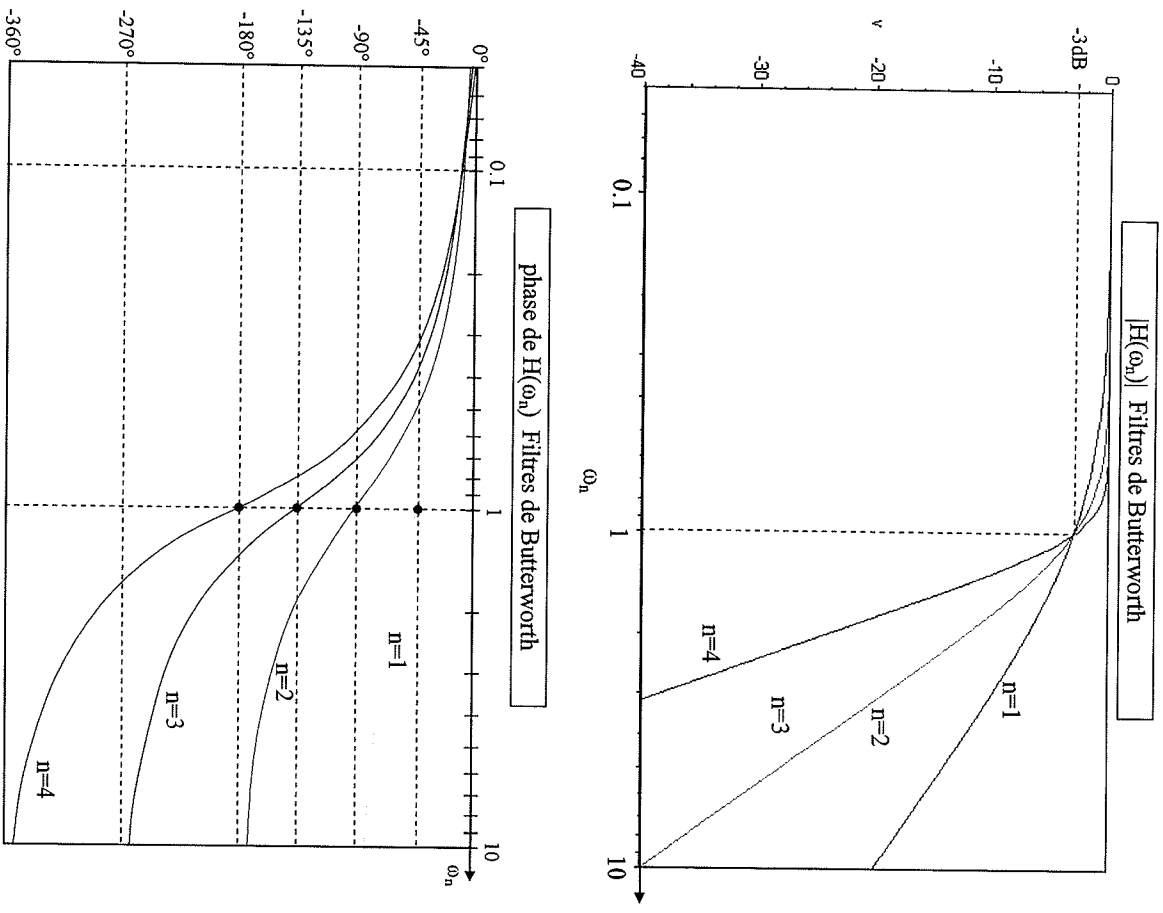
Fonction de transfert d'un filtre de Butterworth du 2nd ordre normalisé à -3dB

On obtient par la même méthode les fonctions de transfert des filtres de Butterworth listée dans le tableau suivant.

m	Filtres de Butterworth 1/H(p _n)
1	p _n +1
2	p _n ² +1,414p _n +1
3	(p _n +1)(p _n ² +p _n +1)
4	(p _n ² +0,7654p _n +1)(p _n ² +1,8478p _n +1)
5	(p _n +1)(p _n ² +0,6180p _n +1)(p _n ² +1,6180p _n +1)
6	(p _n ² +0,5176p _n +1)(p _n ² +1,414p _n +1)(p _n ² +1,9318p _n +1)
7	(p _n +1)(p _n ² +0,4450p _n +1)(p _n ² +1,247p _n +1)(p _n ² +1,8022p _n +1)
8	(p _n ² +0,3986p _n +1)(p _n ² +1,1111p _n +1)(p _n ² +1,6630p _n +1)(p _n ² +1,9622p _n +1)

4°) Propriétés des filtres de Butterworth

Voici le diagramme de Bode des filtres de Butterworth d'ordre 1 à 4.



a) La pulsation de coupure est en général définie à -3dB

b) Le comportement asymptotique des filtres d'ordre m quand ω tend vers l'infini est classiquement en -20m dB/décade ou encore -6m dB/octave

c) Les filtres de Butterworth n'ondule pas dans la bande passante.

d) La phase ne varie pas linéairement en fonction de ω dans la bande passante mais cette non linéarité n'est pas trop importante par rapport à la plupart des autres prototypes (excepté Bessel). Les signaux passants ces filtres ne seront donc pas trop déformés par rapport aux filtres de Chebychev ou de Cauer.

e) La coupure autour de la fréquence de référence ($\omega_n=1$) n'est pas très raide. Les filtres de Butterworth coupent moins rapidement que d'autres filtres prototypes tels que les filtres de Chebychev ou de Cauer.

III. FILTRES DE CHEBYCHEV

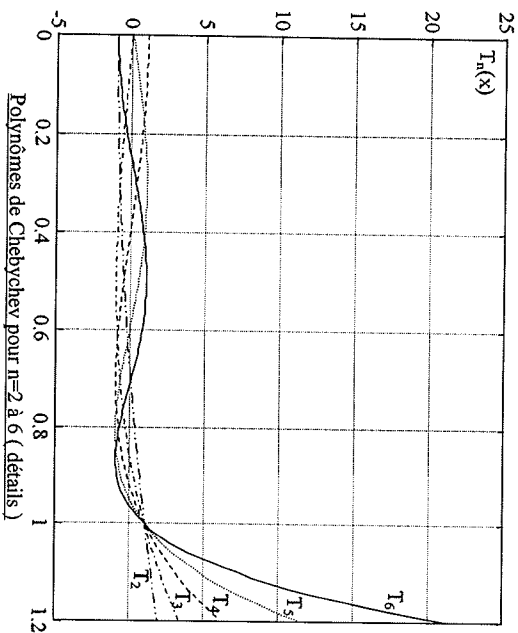
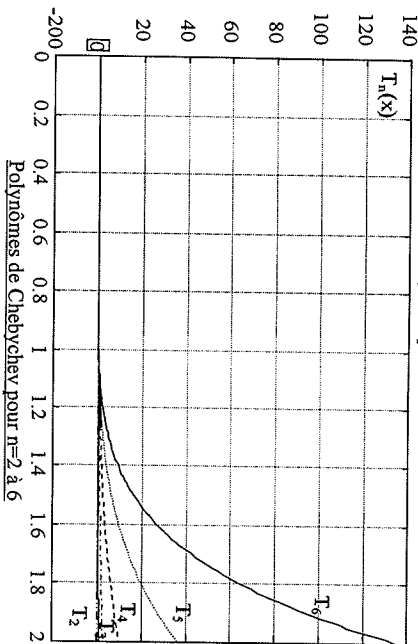
1°) Polynômes de Chebychev

Ces filtres reposent sur les polynômes de Chebychev dont le comportement est intéressant. Ces polynômes sont définis ci-dessous par récurrence :

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

$$T_0(x) = 1 \text{ et } T_1(x) = x$$

Ci-dessous sont tracés les polynômes de Chebychev pour les ordres $n=2$ à 6



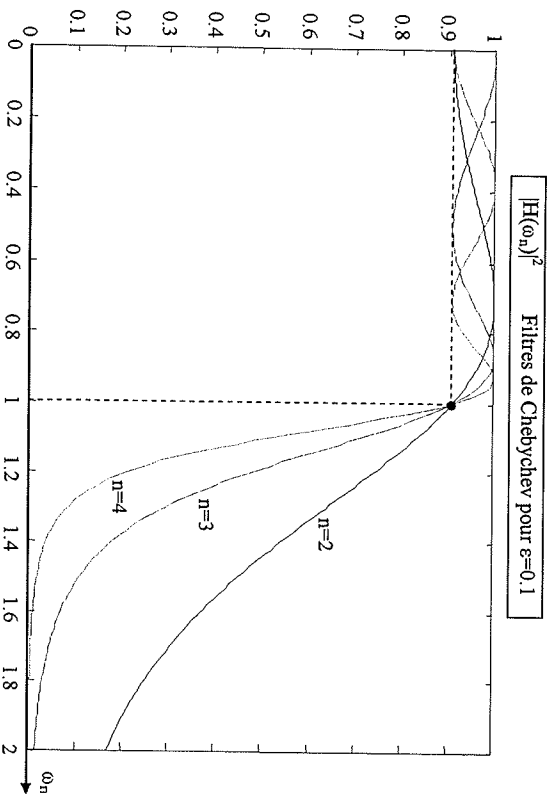
Polynômes de Chebychev pour $n=2$ à 6 (détails)

2°) Définition des filtres de Chebychev

On définit l'atténuation de ces filtres de la manière suivante :

$$A^2(\omega_n) = \frac{1}{|H(\omega_n)|^2} = 1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega_n)$$

La figure suivante montre l'allure de $|H(\omega_n)|^2 = 1/A^2$ pour $\epsilon=0.1$ et $n=2, 3$ et 4



3°) Propriétés des filtres de Chebyshev

- $|H(\omega_n)|^2$ oscille n fois entre 1 et $1+\epsilon^2$ dans la bande passante ($\omega_n=0\dots 1$)
- On appelle ces filtres "equal ripple" (ondulation constante) à cause de la propriété précédente
- $|H(\omega_n=1)|^2$ vaut $1/(1+\epsilon^2)$ donc le gain (en dB) dans la bande passante vaut $10 \log_{10}(1/(1+\epsilon^2))$ par exemple
- $\epsilon=1 \rightarrow$ gain de -3 dB et donc une ondulation=3 dB dans la bande passante
- $\epsilon=0.5 \rightarrow$ gain de -1 dB et donc une ondulation=1 dB dans la bande passante
- à $\omega_n=1$, l'atténuation ne vaut pas forcément -3dB comme pour les filtres de Butterworth. Cela dépend de l'ondulation choisie.

- Comportement asymptotique pour ω_n grand, $|H(\omega_n)|^2 \approx \frac{1}{\epsilon^2 \omega_n^{2n}}$ ce qui donne en gain

$$G = 10 \log_{10} |H(\omega_n)|^2 \approx 10 \log_{10} \frac{1}{\epsilon^2 \omega_n^{2n}} = \text{cte} - 10 \log_{10}(\omega_n^{2n})$$

cad $G \approx \text{cte} - 20n \log_{10}(\omega_n)$ ce qui correspond à une atténuation en 20n dB/décade

- les filtres de Chebychev ont une coupure plus raide que les filtres de Butterworth mais ils ondulent dans la bande passante.
- Leur phase est moins linéaire que les filtres de Butterworth dans la bande passante, et donc que les signaux sont plus déformés avec ces filtres qu'avec les filtres de Butterworth.
- Dans les tableaux les coefficients g_n (valeurs normalisées des composants) on peut remarquer que lorsque l'ordre du filtre est pair, le dernier coefficient (g_{n+1}) est différent de 1. Cela signifie qu'il n'est pas possible de réaliser un filtre de Chebychev symétrique ($g_0=g_{n+1}=1$ cad $R_{source}=R_{charge}=R_0$) pour les ordres pairs. Dans ce cas, le g_{n+1} représente alors la conductance réduite de la charge $Z_L=R_0/g_{n+1}$ qui est différente de R_0 ...

IV. FILTRES DE LEGENDRE (PAPULIS)

1°) Définition

Les filtres de Legendre sont calculés de manière à ce que leur coupure soit la plus raide possible sans pour autant onduler dans la bande passante. Ils possèdent donc une dérivée toujours négative c'est à dire à une atténuation uniformément croissante. Ces filtres reposent sur les polynômes de Legendre de première espèce $P_n(x)$. On définit l'atténuation de ces filtres par :

$$A^2(\omega_n) = \frac{1}{|H(\omega_n)|^2} = 1 + \epsilon^2 L_n(\omega_n^2)$$

où les L_n sont des polynômes calculés à partir de :

si l'ordre n est pair :

$$L_n(x) = \int_{-1}^{2x-1} \sum_{m=0}^K a_m P_m(u) du \quad \text{où } K=(n-1)/2$$

$$a_m = \frac{2m+1}{(m+1)\sqrt{2}}$$

si l'ordre n est impair :

$$L_n(x) = \int_{-1}^{2x-1} (u+1) \sum_{m=0}^K a_m P_m(u) du \quad \text{où } K=(n-2)/2$$

- si K est pair $a_{2n} = \frac{4n+3}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \quad n \in \mathbb{N}$
- $a_{2n+1} = 0$ (les coefficients impairs sont nuls)
- si K est impair $a_{2n+1} = \frac{4n+3}{\sqrt{(2n+2)(2n+3)}} \quad n \in \mathbb{N}$
- $a_{2n} = 0$ (les coefficients pairs sont nuls)

et les polynômes de Legendre de première espèce P_m sont définis par :

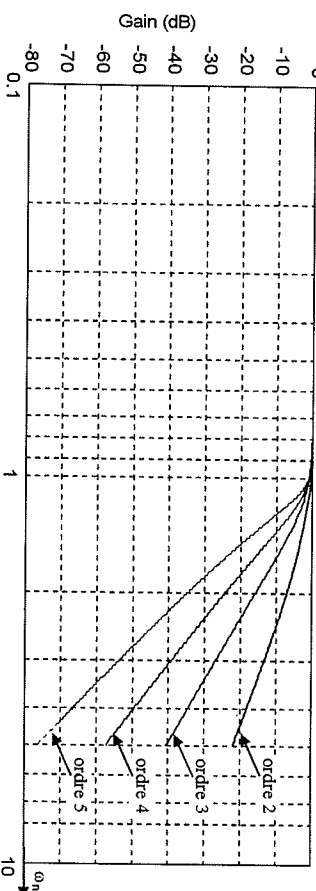
$$P_0(u) = 1; P_1(u) = u; P_m(u) = \frac{1}{m+1} [(2m+1)u P_{m-1}(u) - m P_{m-2}(u)]$$

On trouve finalement l'expression des fonctions $L_n(x)$:

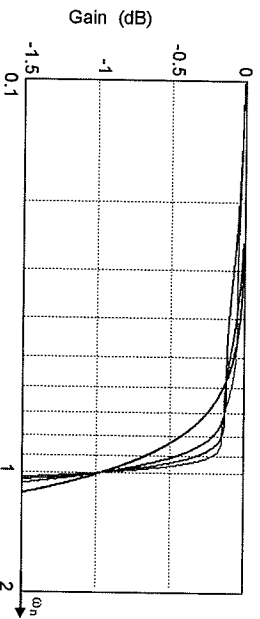
n	$L_n(x)$
1	x
2	x^2
3	$3x^3 - 3x^2 + x$
4	$6x^4 - 8x^3 + 3x^2$
5	$20x^5 - 40x^4 + 28x^3 - 8x^2 + x$
6	$50x^6 - 120x^5 + 105x^4 - 40x^3 + 6x^2$

2°) Réponse fréquentielle

Les figures suivantes montrent le gain en dB des filtres de Legendre d'ordres 2 à 5 (normalisé à -1 dB ($\epsilon=0.5$))



Gain des filtres de Legendre pour n=2 à 5



Gain des filtres de Legendre pour n=2 à 5 (détails)

3°) Propriétés des filtres de Legendre

Les filtres de Legendre sont dit optimaux car leurs propriétés se situent entre les filtres de Butterworth et ceux de Chebychev. Ils sont plus raides que les Butterworth mais moins que les Chebychev, et leur phase est moins linéaire dans la bande passante que les Butterworth mais plus que les Chebychev.

On remarque que $L_n(x=1) = 1$ quelque soit n, et donc que l'atténuation des filtres de Legendre à la fréquence de référence ($\omega_n=1$) est fixée par la valeur de e.

Le carré de l'atténuation vaut $A^2(\omega_n=1) = 1 + \epsilon^2$ et donc:

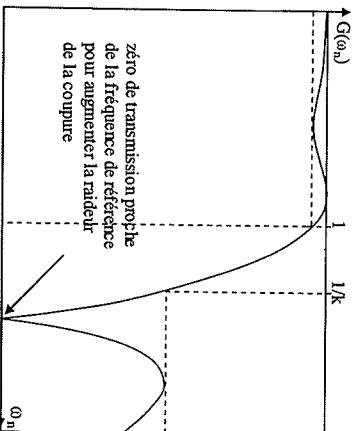
$\epsilon=1$ correspond à un gain de -3 dB à $\omega_n=1$

$\epsilon=0.5$ correspond à un gain de -1 dB à $\omega_n=1$

V. FILTRES DE CAUER

1°) Définition

Les filtres de Causer possèdent des zéros de transmission dans la bande coupée. Cela permet d'éliminer des fréquences indésirables comme par exemple la fréquence porteuse, résidu de modulation. Cela permet également d'augmenter la raideur de la coupure si le premier zéro de transmission est proche de la fréquence de coupure.



Leur gain se met sous la forme suivante :

$$|H(\omega_n)| = \frac{N(\omega_n^2)}{D(\omega_n^2)}$$

2°) Propriétés

Les filtres de Causer ondulent dans la bande passante, et, comme les filtres de Chebychev, possèdent n extrema.

Ils possèdent n/2 (arrondi à l'entier inférieur) zéros dans la bande coupée.

Leur asymptote quand ω_n tend vers l'infini, est horizontale pour les filtres d'ordre pair, et vaut 20dB/décade pour les filtres d'ordre impair.

La coupure autour de la fréquence de référence est la plus raide des prototypes décrit dans ce cours, mais la phase est la moins linéaire dans la bande passante.

VI. FILTRES DE BESSEL (THOMPSON)

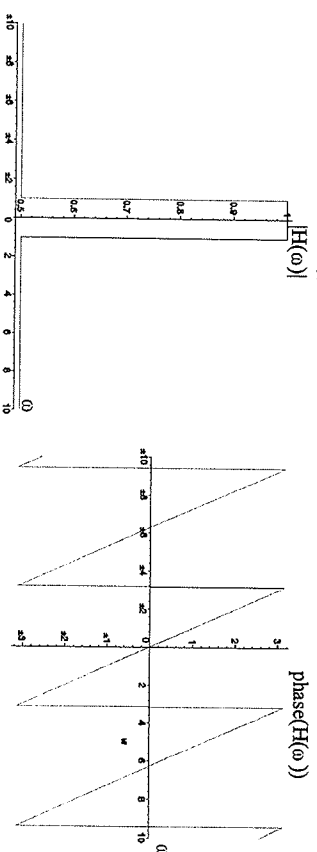
1°) Définition et problématique

Contrairement aux autres prototypes, les filtres de Bessel ne sont pas caractérisés par une forme particulière du gain mais par le fait que l'on cherche à avoir une phase la plus linéaire possible dans la bande passante pour limité au maximum la distortion des signaux.

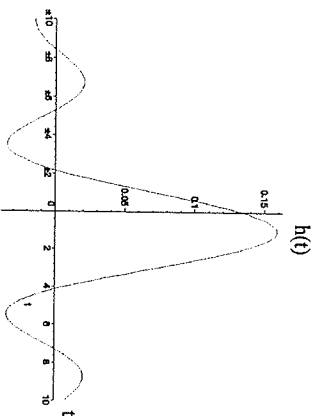
La fonction de transfert doit correspondre à un retard pur et est donc de la forme suivante dans la bande passante:

$$H(p_n) = e^{-\tau p_n} = \frac{1}{e^{p_n \tau}}$$

En effet, la réponse fréquentielle d'un tel filtre est dans la bande passante: $H(\omega_n) = e^{-j\tau\omega_n}$, c'est-à-dire possède un gain constant égal à 1 (voir figure ci-dessous à gauche) et dont la phase décroît linéairement (voir figure ci-dessous à droite),



Malheureusement, cette réponse fréquentielle ne correspond pas à un filtre physiquement réalisable puisque la réponse impulsionnelle est non causale ($h(t)=Tf^{-1}(H(\omega))$) c'est à dire qu'elle commence avant $t=0$ comme on peut le voir sur la figure ci contre.



2°) *Determination de la fonction de transfert d'un filtre de Bessel*

a) Une 1^{re} méthode consiste à faire un développement limité de Taylor de $H(p_n) = \frac{1}{e^{p^n}}$ à l'ordre du filtre considéré. Cette méthode de donne cependant pas de bons résultats car la phase n'est pas correctement approchée avec ce développement.

b) Une seconde méthode consiste à faire un développement plus précis en utilisant les fractions continues de polynômes. Nous passerons le calcul et donnons le résultat ci-dessous. La fonction de transfert d'un filtre de Bessel d'ordre n est donné par :

$$H_n(p) = \frac{a_0^n}{\sum_{i=0}^n a_i^n p^i} \quad \text{où} \quad a_i^n = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i} (n-i)! i!}$$

les polynômes au dénominateur de H(p) sont des polynômes de Bessel B_n(p). Ils peuvent encore s'exprimer de la manière suivante :

$$B_n(p) = (2n-1)B_{n-1}(p) + p^2 B_{n-2}(p) \quad \text{et} \quad B_0(p) = 1 \quad \text{et} \quad B_1(p) = 1+p$$

c) Une troisième méthode consiste à partir d'une fonction de transfert polynomiale quelconque, et d'imposer que la phase de la réponse fréquentielle correspondante soit la plus linéaire possible dans la bande passante.

Prenons pour cela une fonction de transfert du type $H(p) = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{(n-1)} + \dots + a_1 p + a_0}$, ce qui

correspond à la réponse fréquentielle $H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{(n-1)} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$

Dans le but de calculer les coefficients a₀, a₁, ..., a_{n-1}, on impose que la phase φ'(ω) de la réponse fréquentielle soit la plus linéaire possible dans la bande passante, c'est-à-dire que :

$$\left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_{\omega=0} = -1 \quad ; \quad \left. \frac{d^2\phi}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{d^3\phi}{d\omega^3} \right|_{\omega=0} = 0 \quad ; \quad \dots \quad \left. \frac{d^k\phi}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = 0 \quad \dots$$

jusqu'à disposer d'autant d'équations que d'inconnues a_k. (il faut remarquer que les dérivées paires de j sont forcément nulles et ne comptent donc pas dans le nombre d'équation nécessaire.)

Un exemple de scripti Maple™ donné ci-dessous, applique le procédé que l'on vient de décrire dans le cas d'une fonction de transfert d'ordre 4.

$$H := \frac{1}{a0 + a1 p + a2 p^2 + a3 p^3 + p^4}$$

```
p:=1*w;
assume(w,real);
assume(a0>0);
assume(a1>0);
assume(a2>0);
assume(a3>0);
H;
```

$$H(\omega) = \frac{1}{a0 + I a1 \omega - a2 \omega^2 - I a3 \omega^3 + \omega^4}$$

```
phi:=-I*ln(H/abs(H));
phi1:=diff(phi,w);
phi3:=diff(diff(phi1,w),w);
phi5:=diff(diff(diff(phi3,w),w),w);
phi7:=diff(diff(diff(phi5,w),w),w);

f1:=subs(w=0,phi1);
f3:=subs(w=0,phi3);
f5:=subs(w=0,phi5);
f7:=subs(w=0,phi7);

eqns := {f1=-1, f3=0, f5=0, f7=0};
sols := solve(eqns);
```

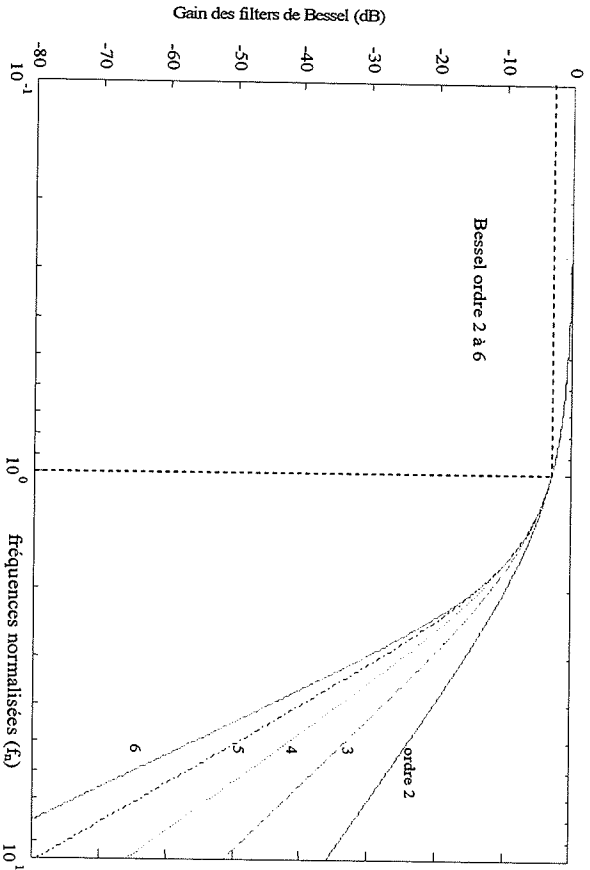
$$sols := \{a0 = 105, a1 = 105, a2 = 45, a3 = 10\}$$

et on trouve la fonction de transfert de Bessel du 4^{eme} ordre : $H(p) = \frac{1}{105 + 105p + 45p^2 + 10p^3 + p^4}$

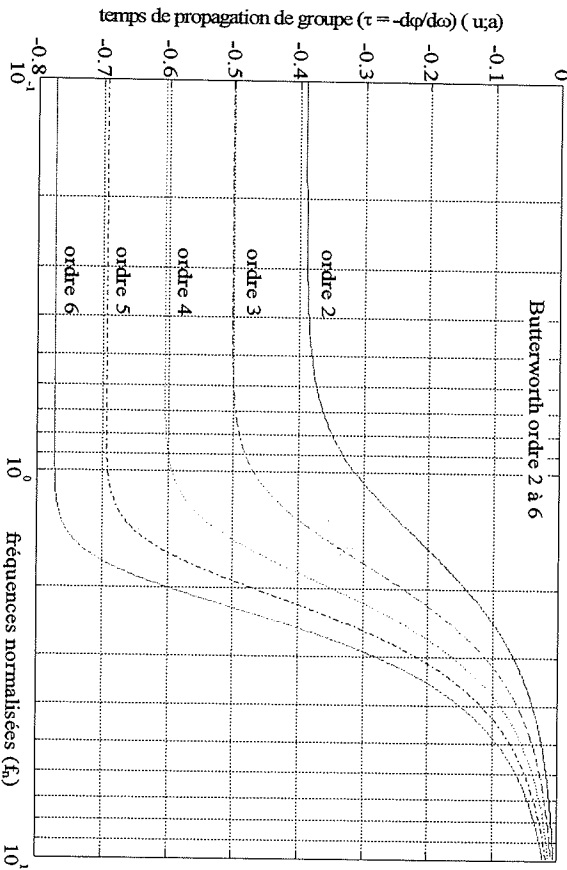
Remarques :

Les fonctions de transfert des filtres de Bessel que l'on obtient par les méthodes ci-dessus ne sont pas normalisées à -3dB. Une normalisation en fréquence et en amplitude est ensuite nécessaire pour obtenir des réponses normalisées (à -3dB par exemple) à ω=1.

3°) Réponse fréquentielle des filtres de Bessel



On constate que la réponse d'un filtre de Butterworth est quasi indépendante de l'ordre dans la bande passante.



On constate que la linéarité de la phase est d'autant meilleure que l'ordre du filtre est élevé.

4°) Propriétés

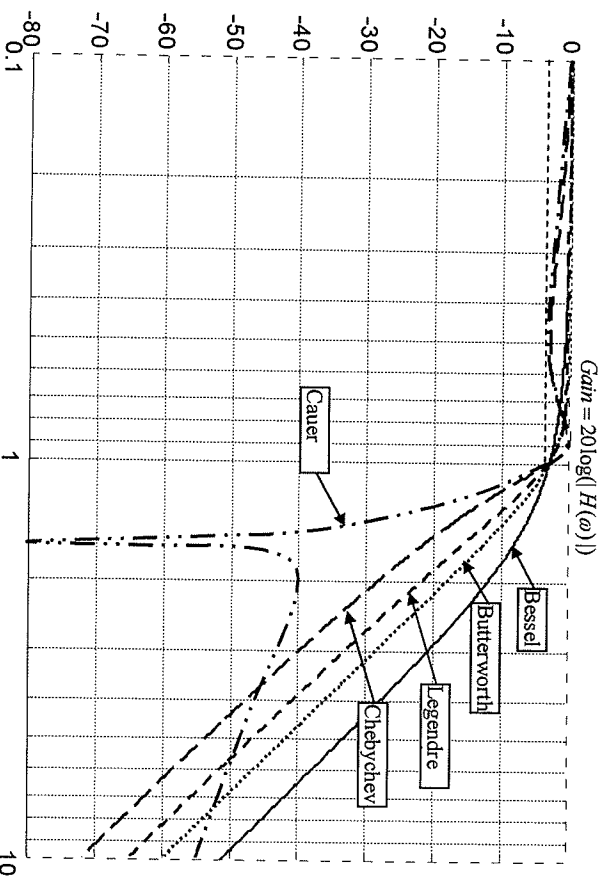
Les filtres de Bessel sont les filtres qui déforment le moins les signaux dans la bande passante. Par contre leur coupure est la moins raide de tous, et ils sont pour cette raison très difficiles à utiliser car ils nécessitent des ordres très élevés.

Leur pente en $\omega \rightarrow \infty$ est en -20 m dB/décade comme tous les autres filtres polynômiaux.

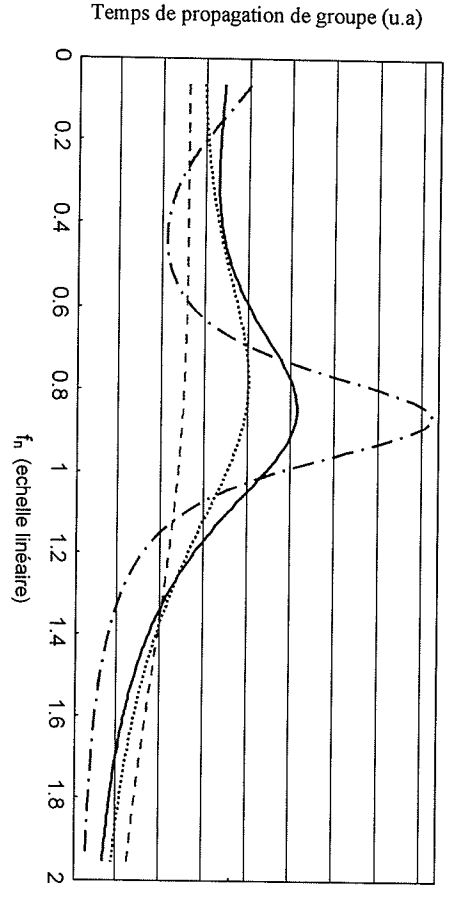
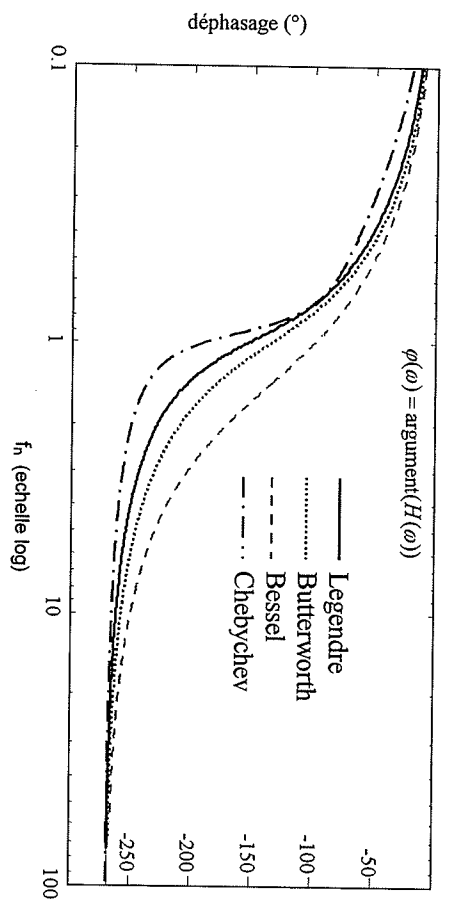
Remarque : Les filtres obtenus par transposition d'un filtre passe bas de Bessel ne possèdent pas les propriétés des filtres de Bessel. En effet, les formules de transposition n'ont pas été prévues pour conserver des propriétés de phase mais plutôt pour conserver les propriétés du gain. Pour cette raison, nous ne réaliserons pas de filtre de Bessel autres que Passe Bas.

VII. COMPARAISON DES FILTRES

La figure suivante montre les différences de comportement de gain de différents prototypes de filtres d'ordre 3 normalisés à -3dB.



La figure suivante montre la phase en fonction de la fréquence pour chacun des filtres prototypes décrit précédemment. On voit aussi, en bas de la figure, un tracé du temps de propagation de groupe ($-\frac{d\phi}{d\omega}$) pour chacun des prototypes. On constate que seul le filtre de Bessel possède un tps de propagation de groupe à peu près constant dans la bande passante.



VIII. SYNTHÈSE DES FILTRES PASSIFS

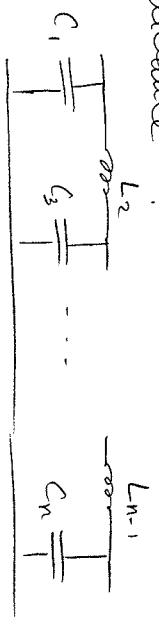
Synthèse des Filtres Passifs

VIII.1

Comme nous l'avons expliqué précédemment les filtres en basse fréquence ont toujours caractéristiques déterminées par (self, condensateur, capacités, ...) et n'utilisent jamais d'amplificateurs opérationnels. Nous allons voir dans ce chapitre la synthèse des filtres passifs (comprenant des inductances et des condensateurs) en Π .

I] Filtrés Passifs

Nous n'étudions maintenant que les filtres en Π dont la structure est la suivante :



Filtre Passif d'ordre n .

Le calcul des valeurs des composants C_{k-1} et L_k ($k \in \mathbb{N}$, pairs) se fait par dénormalisation des valeurs que l'on trouve dans des tableaux (voir annexe).

Par exemple, si l'on désire réaliser

VIII.2

un filtre de Butterworth (voir chapitre sur les prototypes de filtres) d'ordre 3 ($n=3$), il suffit de relever les valeurs normalisées des composants dans le tableau correspondant.

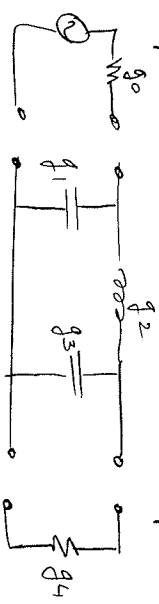
Ainsi on trouve pour un filtre passif symétrique (impédance de source = impédance de charge = 1) d'ordre 3 les valeurs suivantes :

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \quad g_3 = 1$$

(et $g_0 = g_4 = 1$)

Les coefficients g_{k-1} (k pairs) ont les valeurs des capacités normalisées et les coefficients g_k (k pairs) ont les inductances normalisées. g_0 représente l'impédance normalisée de la source (générateur) et g_4 la conductance normalisée de la charge.

Le filtre normalisé correspondant est donc :



Si on note f_0 la fréquence de référence pour normaliser les fréquences ($f_0 = f_p$ pour un filtre passe bas) alors on peut calculer les valeurs

réelles (dénominateurs) des composants en VIII.3
utilisant les formules de dénormalisation :

$$R_{n-1} = \frac{g_{k-1}}{R_0 \omega_0} \quad \text{et} \quad L_k = \frac{R_0 g_k}{\omega_0}$$

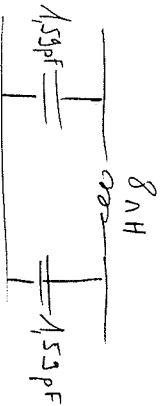
Dans l'exemple précédent d'un filtre du 3ème ordre de Butterworth de dernière fréquence passe $f_p = 2 \text{ kHz}$, et donc $\omega_0 = 2 \text{ kHz}$,

on trouve : $C_1 = \frac{1}{50 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 210^3} = \underline{\underline{1,59 \mu\text{F}}}$

$$L_2 = \frac{50 \cdot 2}{2\pi \cdot 210^3} = \underline{\underline{8 \text{ nH}}}$$

$$C_3 = C_1 = \underline{\underline{1,59 \mu\text{F}}}$$

(en choisissant $R_0 = 50 \Omega$ comme impédance de référence cod comme un pédance de source)
Le filtre correspondant est donc le suivant :



III Filtres Pass-Bands .

La structure des Filtres Pass-Bands est obtenue par transposition de la structure des filtres Pass-Bas détaillés plus haut.

On a vu au chapitre 5 comment il est possible de transformer un filtre passe bas en un filtre passe haut en conservant les propriétés principales du gain .

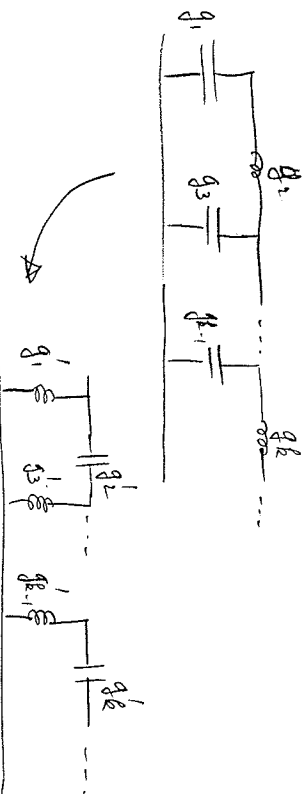
Il suffit pour cela de remplacer dans la fonction de transfert :

$$p_n \rightarrow \frac{1}{p_n}$$

On a vu également que cette transformation transforme :

les capacités \rightarrow inductances .
les inductances \rightarrow capacités .

Ainsi un filtre passe bas en π se transforme en un filtre passe haut comme le montre la figure suivante :



et les valeurs normalisées de VIII.5

composants du filtre passe haut ne calculent à partir de celles du filtre passe bas

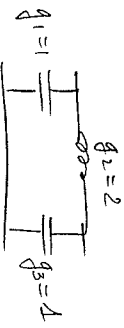
comme suit :

$$\text{Capacité } g_{k-1} \longrightarrow \text{inductance } g_{k-1}' = \frac{1}{g_{k-1}}$$

$$\text{inductance } g_k \longrightarrow \text{capacité } g_k' = \frac{1}{g_k}$$

Exemple :

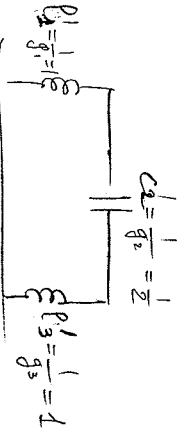
On désire fabriquer un filtre passe haut de 1^{ère} fréquence passante $f_p = 1 \text{ GHz}$ du 3^{ème} ordre qui a un gain comparable à celui du passe bas normalisé suivant :



Filtre Passe Bas normalisé de départ.

a) On doit d'abord transformer le filtre pas normalisé de départ par le transformateur en filtre passe haut normalisé :

Transformation :



b) Il faut ensuite le renormaliser à la fréquence

$$f_0 = f_p = 1 \text{ GHz}$$

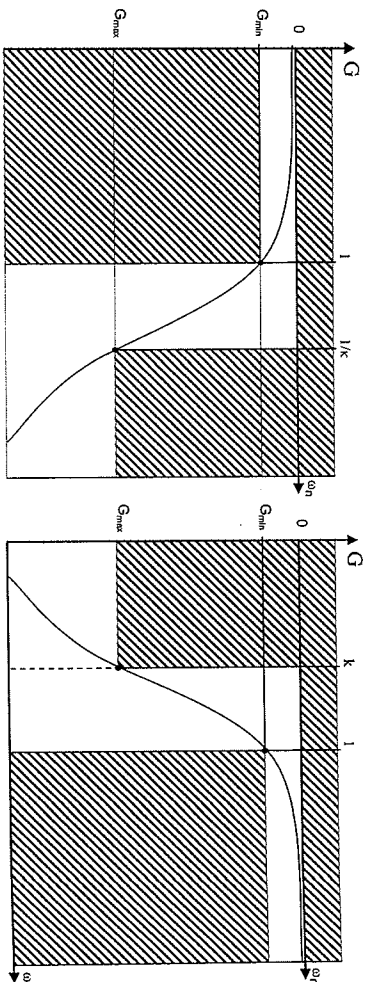
VIII.6

$$L_1' = \frac{g_1' R_0}{\omega_0} = \frac{R_0}{g_1 \omega_0} = 8 \text{ nH}$$

$$C_2' = \frac{g_2}{R_0 \omega_0} = \frac{1}{g_2 R_0 \omega_0} =$$

$$L_2 = L_1' = 8 \text{ nH}$$

et la réponse fréquentielle est obtenue par transformation et renormalisation de la réponse du filtre passe bas normalisé.



Dans ce cas général, le calcul des composants du passe haut à partir des valeurs normalisées du P bas associé se fait par :

$$L_{k-1}' = \frac{g_{k-1}' R_0}{\omega_0} = \frac{R_0}{g_{k-1} \omega_0}$$

$$C_k' = \frac{g_k}{R_0 \omega_0} = \frac{1}{g_k R_0 \omega_0}$$

Filtre P. Haut
valeurs normalisées
des caps et des induct
du P. bas associé.

III Filtes Pass-Bandes

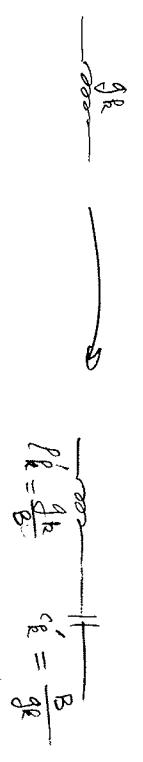
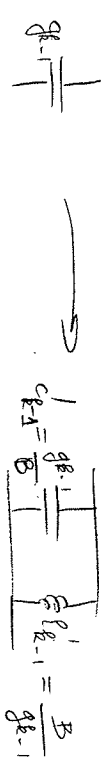
(VIII.7)

On a un ou plusieurs I que l'on peut penser d'un filte Pass-Bas à un filte Pass-Bande par transposition :

$$P_n \rightarrow \frac{1}{B} \left(P_n + \frac{1}{P_n} \right)$$

(avec $B = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0}$, Bande Passante relative)

On a un également que les composants normalisés du filte Pass-Bas deviennent par transposition :



Le calcul des valeurs des composants du filte Pass-Bande ne fait que de la manière qui vient par dénormalisation des valeurs réduites :

Branches parallèles :

$$C'_{k-1} = \frac{c_{k-1}}{R_0 \omega_0} = \frac{g_{k-1}}{B R_0 \omega_0}$$

$$L'_{k-1} = \frac{L_{k-1} R_0}{\omega_0} = \frac{B R_0}{g_k \omega_0}$$

P. bande centre ω_0
B = $\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0}$

Branches Série :

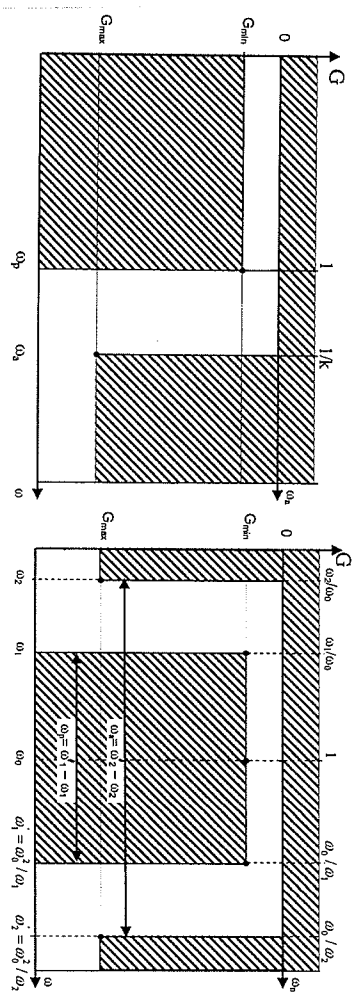
(VIII.8)

$$L'_k = \frac{L_k R_0}{\omega_0} = \frac{g_k R_0}{B \omega_0}$$

$$C'_k = \frac{c_k}{R_0 \omega_0} = \frac{B}{g_k R_0 \omega_0}$$

P. bande centre ω_0
B = $\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0}$

Et on pose du Gabarit Pass-Bande au gabarit Pass-Bas (ou réciproquement) par :



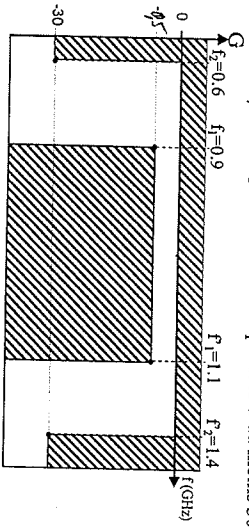
Exemple de synthèse d'une Filte Pass-Bande

On veut réaliser un filte Pass-Bande la bande passante $f_1 = 0,9 \text{ GHz}$ $f'_1 = 1,1 \text{ GHz}$ avec une atténuation maximale de 1 dB et qui coupe les fréquences de 30 dB en dessous de $f_2 = 0,95 \text{ GHz}$ et au dessus de $f'_2 = 1,2 \text{ GHz}$. Le Gabarit correspondant au cahier des charges est le suivant :

Exemple :

On veut fabriquer un filtre Passe Bande de bande passante 0.9 → 1.1 GHz avec une atténuation maximale dans la bande de 0.6 GHz, et qui atténue les fréquences d'au moins 30 dB en dessous de 0.6 GHz et au dessus de 1.4 GHz.

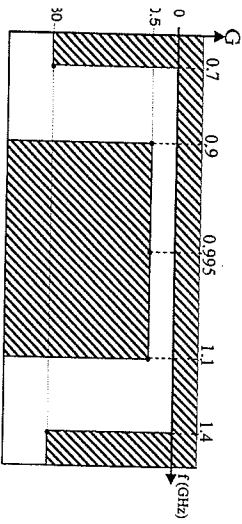
VIII. 9



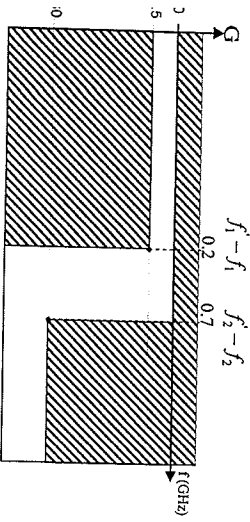
La fréquence centrale f_0 est calculée par les relations :

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = 0.995 \text{ GHz} \quad \text{et} \quad f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = 0.916 \text{ GHz}$$

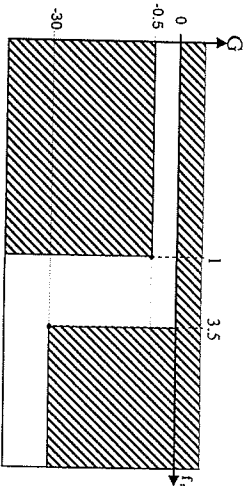
On constate que le gabarit n'est pas symétrique puisque $\sqrt{f_1 \cdot f_1} \neq \sqrt{f_2 \cdot f_2}$. Il faut donc rendre le gabarit symétrique tout en restant compatible avec le cahier des charges. Une solution consiste à augmenter f_2 . Par exemple il faut que $\sqrt{f_2 \cdot f_2} = 0.995 \text{ GHz}$ ce qui donne $f_2 = 0.995^2 / f_1 = 0.7 \text{ GHz}$. C'est où le gabarit symétrisé suivant :



On en déduit le gabarit du Passe Bas associé :



n normalise le gabarit passe bas :



Puis on cherche parmi les prototypes celui qui conviendrait et l'ordre nécessaire.

On constate en regardant les gains des prototypes qu'un filtre de Chebychev d'ondulation 0.5 dB d'ordre 3 suffit. Les tableaux donnent alors les valeurs normalisées des composants du filtre passe bas associé :

$$g_0 = 1 ; g_1 = 1.5963 ; g_2 = 1.0967 ; g_3 = 1.5963 ; g_4 = 1$$

Le calcul des composants du filtre Passe Bande donne :

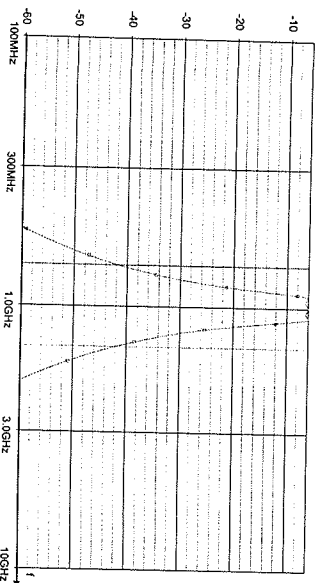
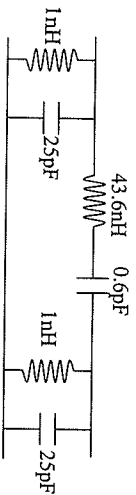
$$C_1' = \frac{g_1}{B R_0 \omega_0} \quad L_1 = \frac{B R_0}{g_1 \omega_0} \quad C_2' = \frac{B}{g_2 R_0 \omega_0} \quad L_2 = \frac{g_2 R_0}{B \omega_0} \quad C_3' = C_1' \quad L_3 = L_1$$

$$\text{avec } B = \frac{0.2}{0.995} = 0.2 = 20\% \quad \text{et} \quad \omega_0 = 2\pi \cdot 0.995 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

ce qui donne :

$$C_1' = 25 \text{ pF} \quad L_1 = 1 \text{ nH} \quad C_2' = 0.6 \text{ pF} \quad L_2 = 43.6 \text{ nH} \quad C_3' = C_1' \quad L_3 = L_1$$

et le schéma du filtre passe bande est le suivant :



VIII. 10

IV Filtres Coupe Bandes

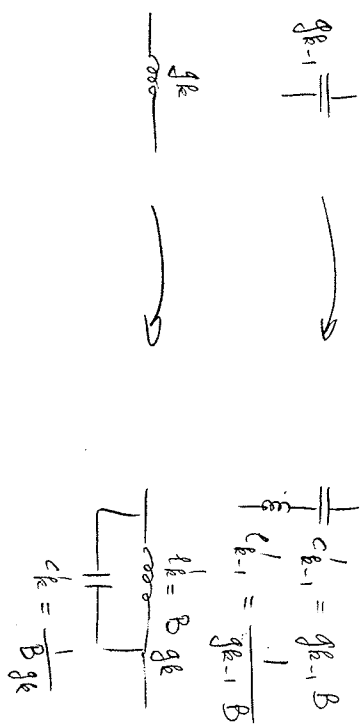
VIII.11

On a vu que l'on peut passer d'un filtre P-bas à un filtre bande par la transformation :

$$p_n \rightarrow \frac{B}{p_n + \frac{1}{p_n}}$$

où $B = \frac{\omega_2' - \omega_2}{\omega_0}$

On a vu également que les composants normalisés du P-bas sont restés les mêmes :



Les valeurs des composants du filtre bande bande ont alors été calculées par dénormalisation des valeurs réduites c_{k-1} , l'_k , g_{k-1} et g_k

Branche Parallèle :

$$c'_{k-1} = \frac{c_{k-1}}{R_0 \omega_0} = \frac{g_{k-1} B}{R_0 \omega_0}$$

$$l'_k = \frac{l'_k R_0}{\omega_0} = \frac{R_0}{g_k B \omega_0}$$

où $B = \frac{\omega_2' - \omega_2}{\omega_0}$

Branche Série :

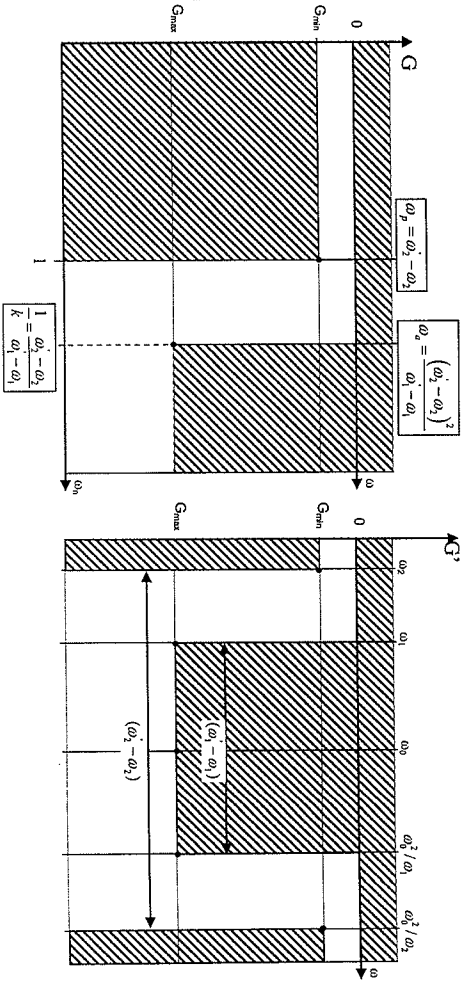
VIII.12

$$l'_k = \frac{l'_k R_0}{\omega_0} = \frac{B g_k R_0}{\omega_0}$$

$$c'_k = \frac{c'_k}{R_0 \omega_0} = \frac{1}{B g_k R_0 \omega_0}$$

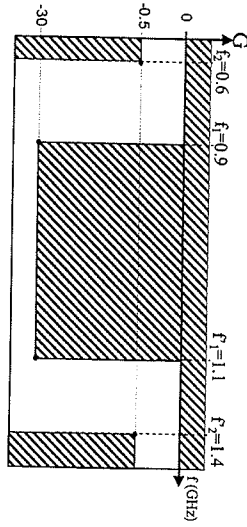
où $B = \frac{\omega_2' - \omega_2}{\omega_0}$

On passe du Gabarit Coupe Bandes au Gabarit P-bas normalisé par :



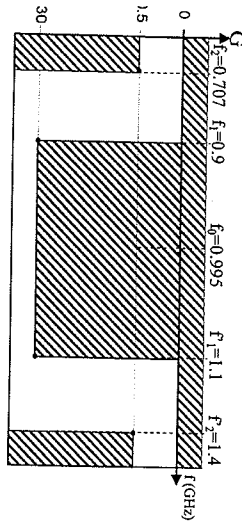
Exemple :

On veut fabriquer un filtre Coupe Bande de bande coupée 0.9 → 1.1 GHz avec une atténuation minimale dans la bande coupée de 30 dB, et qui laisse passer les fréquences avec une atténuation maximale de 0.5dB en dessous de 0.6 GHz et au dessus de 1.4 GHz.



La fréquence centrale f_0 est calculée par les relations :
 $f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = 0.995 \text{ GHz}$ et $f_0 = \sqrt{f_2 \cdot f_2'} = 0.916 \text{ GHz}$

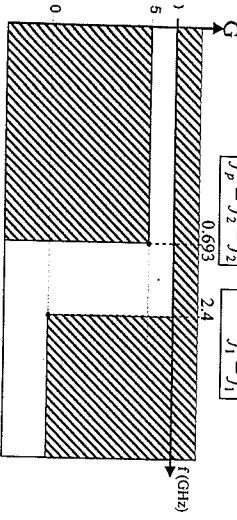
On constate que le gabarit n'est pas symétrique puisque $\sqrt{f_1 \cdot f_1'} \neq \sqrt{f_2 \cdot f_2'}$. Il faut donc rendre le gabarit symétrique tout en restant compatible avec le cahier des charges. Une solution consiste à augmenter f_2 . Par exemple il faut que $\sqrt{f_2 \cdot f_2'} = 0.995 \text{ GHz}$ ce qui donne $f_2 = 0.995^2 / f_2' = 0.707 \text{ GHz}$ où le gabarit symétrisé suivant :



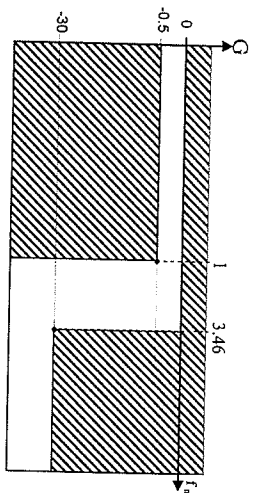
On en déduit le gabarit du Passe Bas associé :

$$f_p = f_2' - f_2' = 0.693$$

$$f_0 = \frac{f_p^2}{f_1' - f_1'}$$



1 normalise le gabarit passe bas :



Puis on cherche parmi les prototypes celui qui conviendrait et l'ordre nécessaire. On constate en regardant les gains des prototypes qu'un filtre de Chebyshev d'ondulation 0.5 dB d'ordre 3 suffit. Les tableaux donnent alors les valeurs normalisées des composants du filtre passe bas associé :

$g_0 = 1$; $g_1 = 1.5963$; $g_2 = 1.0967$; $g_3 = 1.5963$; $g_4 = 1$

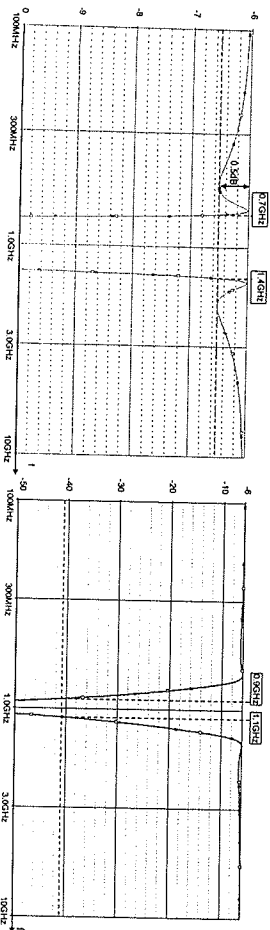
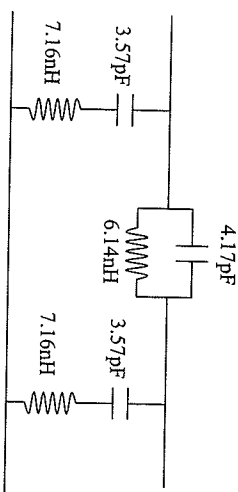
Le calcul des composants du filtre Passe Bande donne :

$$C_1' = \frac{B g_1}{R_0 \omega_0} \quad L_1' = \frac{R_0}{B g_1 \omega_0} \quad C_2' = \frac{1}{B g_2 R_0 \omega_0} \quad L_2' = \frac{B g_2 R_0}{\omega_0} \quad C_3' = C_1' \quad L_3' = L_1'$$

avec $B = \frac{0.69}{0.995} = 0.7 = 70\%$ et $\omega_0 = 2\pi \cdot 0.995 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$ ce qui donne :

$C_1' = 3.57 \text{ pF}$; $L_1' = 7.16 \text{ nH}$; $C_2' = 4.17 \text{ pF}$; $L_2' = 6.14 \text{ nH}$; $C_3' = C_1'$; $L_3' = L_1'$

et le schéma du filtre passe bande est le suivant :



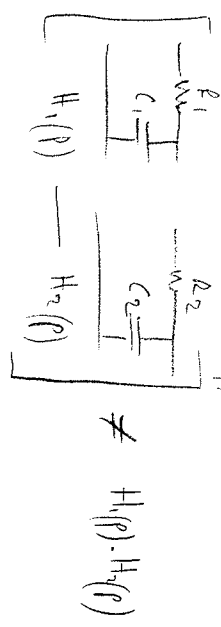
**IX. SYNTHÈSE DES FILTRES ACTIFS
GÉNÉRALITÉS**

Synthèse des Filtrés Actifs (Généralités) [IX.1]

I) Méthodes

Défauts des Filtrés passifs

- mise en cascade difficile



- étage du 1^{er} ordre résonnant

⇒ utilisation de réglé

ou réglé ⇒ éléments en contact à haute fréquence - perte élevée (R)

→ aux fréquences basses et moyennes ($f < 99.100 \text{ MHz}$) utilisation de filtrés actifs (AOP).

- aux fréquences intermédiaires $f \sim 1$ à 100 MHz

⇒ filtrés passifs, à vide de surface ... etc.

- aux fréquences hautes $f \sim 99.100 \text{ MHz}$ → 99.10^8 GHz

⇒ filtrés passifs (L, C) à éléments localisés - à constante répartie (lignes).

- en technologies hybride (Circuits imprimés + composants + lignes)
- en technologies intégrées (MCM-D).

→ Filtrés à cavité - métallique ou diélectrique

II) Méthode de Synthèse

[IX.2]

On procède à la décomposition de la fonction de transfert ?

$$H(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}$$

en éléments simples du 1^{er} ou du 2nd ordre.

La réalisation n'est possible lors en

cascadant des circuits réalisant ces

parties du 1^{er} ou 2nd ordre, circuits

ne comportant d'impédance d'entrée élevée

et de sortie faible (typiquement en

utilisation des AOP ou résonance) pour

éviter de modifier ces fonctions au moment

de l'enchâssage - Coût élevé pour

elle-même être synthétisée de façon difficile.

1^{re} synthèse par variable d'état

On synthétise dans ce cas directement

quelques différentielles. Par exemple

pour un système du second ordre du

type passe haut (High Pass: HP).

$$H(p) = \frac{p^2}{K p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2} = \frac{S(p)}{F(p)}$$

Correspond à l'équation :

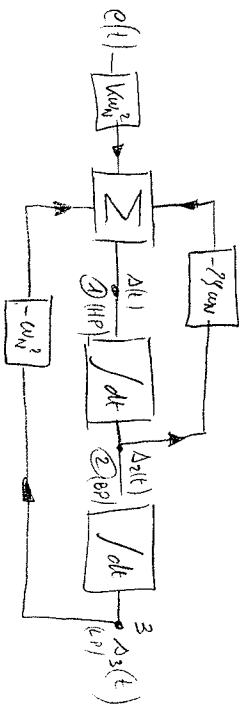
LX.3

$$K \omega_n^2 E(p) = \left[1 + 2\gamma \frac{\omega_n}{p} + \frac{\omega_n^2}{p^2} \right] S(p)$$

cad $S(p) = K \omega_n^2 E(p) - 2\gamma \frac{\omega_n}{p} S(p) - \frac{\omega_n^2}{p^2} S(p)$

qui correspond à l'équation différentielle :

$$A(t) = K \omega_n^2 e(t) - 2\gamma \omega_n \int A(t) dt - \omega_n^2 \iint A(t) dt^2$$



La sortie ① donne alors bien la fonction réponse.

② On peut remarquer à la sortie ③ que le signal $A_2(t)$ correspond à un filtre passe bande purique :

$$A_2(t) = \int A_1(t) dt \Rightarrow S_2(p) = \frac{S_1(p)}{p}$$

cad $S_2(p) = \frac{K p}{\underbrace{p^2 + 2\gamma \frac{p}{\omega_n}}_{\text{Pole de transmission}} + 1} E(p)$
 d'un Passe bande (BP)

et que la sortie ③ donne la fonction de transfert d'un filtre Passe Bas. En effet :

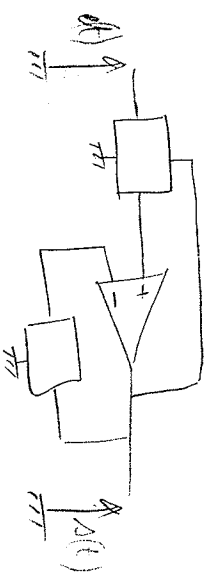
LX.4

$$A_2(t) = \int A_1(t) dt \Leftrightarrow S_2(p) = \frac{S_1(p)}{p}$$

cad $S_3(p) = \frac{K}{\underbrace{\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\gamma \frac{p}{\omega_n} + 1}_{\text{Atténuation (LP)}}} E(p)$

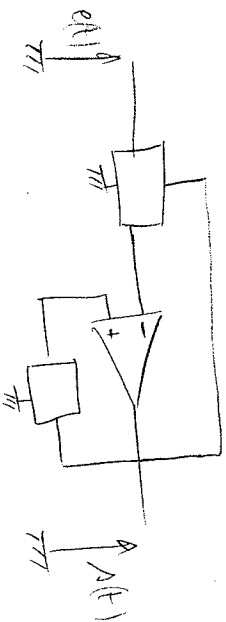
2°/ Synthèse de cellules de retour à 1 AOP.

i) à rétroaction positive



type Sérum-Peay

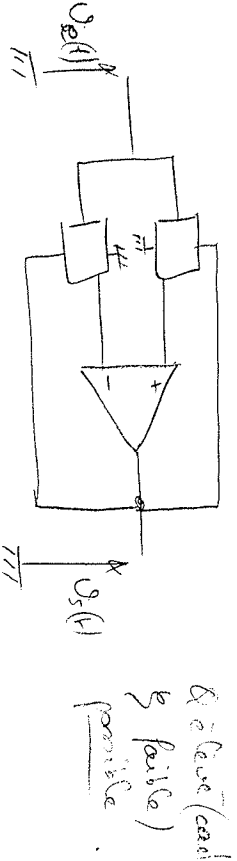
ii) à rétroaction négligée



type Passif

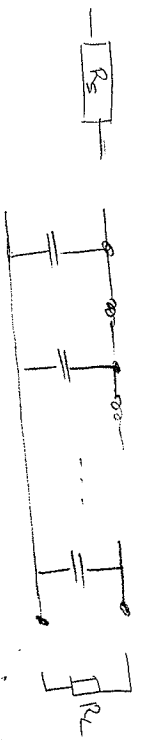
mais les réglages à 1 AOP type -
 Selon freq ou P, on a conduit à une
 non-bilité qui croît avec le
 usé de quati- té d (1/2S)
 ⇒ dans utilisable pour ces
 A < 8
 cad $\gamma > 0,06$.

iii) A rétroaction double



3°) Synthèse par simulation de Composites

On part alors de cas de structures de Pitta passif LC en échelle du type :

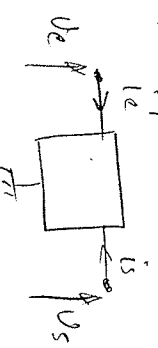


et on simule les inductances par des circuits conservateurs d'impédance qui

ont des quadripôles définis par les équations :

$$U_e = K U_s$$

$$i_s = -K' i_e$$



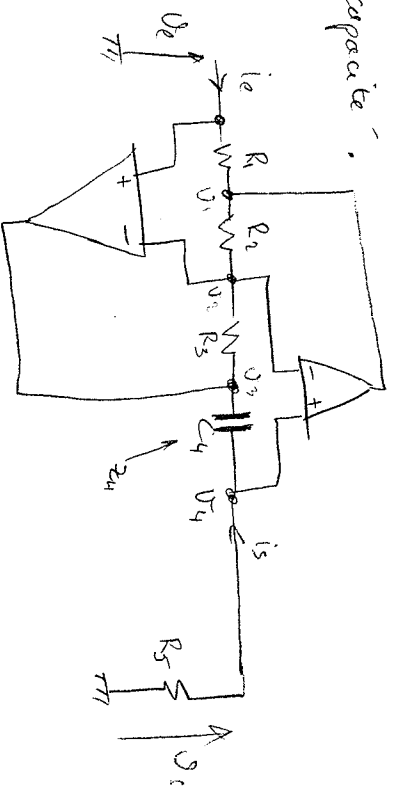
$$\text{donc } \frac{U_e}{i_e} = \frac{K U_s}{i_s / -K'} = -\frac{K K'}{K'} \frac{U_s}{i_s}$$

$$\text{donc } Z_e = K Z_s$$

Si K est négatif on parle de NIC (Négative Impédance Converter).

Si K est complexe on parle alors de SIC (Generalized Impedance Converter).

i) On peut par exemple utiliser un SIC pour simuler une inductance en utilisant une capacité :



$$\text{on a alors } Z_e = \frac{U_e}{i_e} = \frac{R_1 R_3}{R_2} \frac{R_5}{Z_4} \quad R_5 = K R_3$$

$$\text{Si on prend } R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = R$$

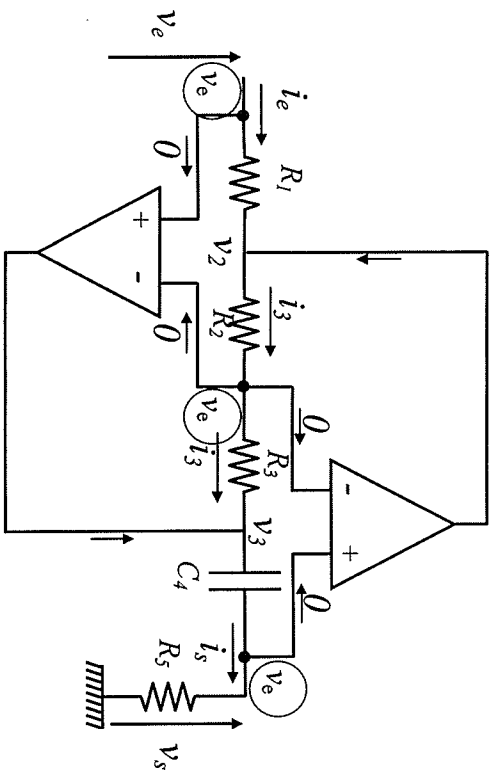
$$\text{et } Z_4 = Z_c = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\text{on a } Z_e = K R \text{ ou } K = \frac{R}{Z_c}$$

$$\text{car } Z_c = \frac{R^2}{Z_c} = j\omega R^2 C \Rightarrow L = R^2 C$$

il s'agit ici d'une inductance L à la mesure.

Calcul détaillé du GIC:



Amplificateurs opérationnels considérés comme parfait $\rightarrow V_+ = V_-$ donc $v_2 = v_3 = v_e = R_5 i_s$

or $i_s = \frac{v_3 - v_e}{Z_{C4}}$

dou $v_e = R_5 \frac{v_3 - v_e}{Z_{C4}} = R_5 (v_3 - v_e) C_4 p$ cad $v_3 = v_e \left(\frac{1}{R_5 C_4 p} + 1 \right)$

On a $i_3 = \frac{v_e - v_3}{R_3} = v_e \frac{1 - \left(\frac{1}{R_5 C_4 p} + 1 \right)}{R_3} = \frac{-v_e}{R_3 R_5 C_4 p}$ et $i_3 = \frac{v_2 - v_e}{R_2}$

donc $\frac{v_2 - v_e}{R_2} = \frac{-v_e}{R_3 R_5 C_4 p}$ d'où $(v_2 - v_e) R_3 R_5 C_4 p = -v_e R_2$ cad $v_2 = v_e \left(1 - \frac{R_2}{R_3 R_5 C_4 p} \right)$

or on a $i_e = \frac{v_e - v_2}{R_1}$ donc $i_e = v_e \frac{R_2}{R_1 R_3 R_5 C_4 p}$

or $Z_e = \frac{v_e}{i_e}$

donc $Z_e = \frac{R_1 R_3 R_5 C_4 p}{R_2}$

exemple de réalisation d'un filtre LC

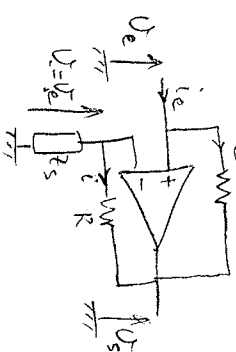


où la GIC possède un $K = \frac{R}{Z_{C2}}$

et $L_2 = R^2 C_2$

ici NIC

le NIC est un circuit qui réalise la fonction : $Z_e = -Z_s$ où Z_s est une impédance donnée.



ma $Z_e - Z_s = R_1 i_e$

et $Z_s - Z_e = R_1 i_s$

or $Z_s = Z_e$

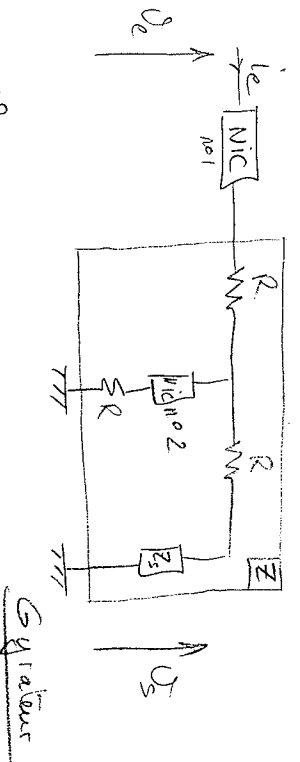
d'où $Z_e - Z_s = R_1 i$ donc $i = i_e$

et $Z_e = -Z_s i$ donc $Z_e = -Z_s i_e$

d'où $Z_e = -Z_s$

(1X.9)

Le NIC ne peut ne permettre pas de réaliser l'inversion d'impédance pour transformer une capacité en une inductance. Cependant, en combinant 2 NIC on peut alors réaliser un gyrateur qui autorise cette opération. Le circuit suivant est un gyrateur :



on a $Z_e = Z_e = -Z$
 NIC n°1

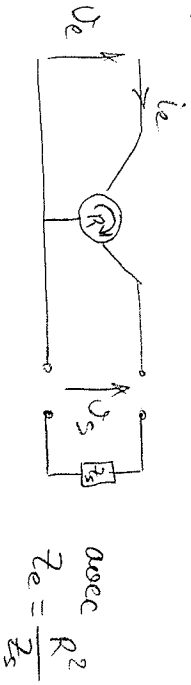
or $Z = R + \left[\frac{-R}{Z_s} \parallel (R + Z_s) \right] = R + \frac{-R(R + Z_s)}{-R + R + Z_s}$

car $Z = R + \frac{-R(R + Z_s)}{Z_s} = \frac{-R^2}{Z_s}$

donc $Z_e = \frac{R^2}{Z_s}$ l'impédance de sortie est l'inverse de l'impédance Z_s .

(1X.10)

un gyrateur est symbolisé par :



On voit donc que si on place un condensateur en sortie (à la place de Z_s) alors on voit en entrée une impédance :

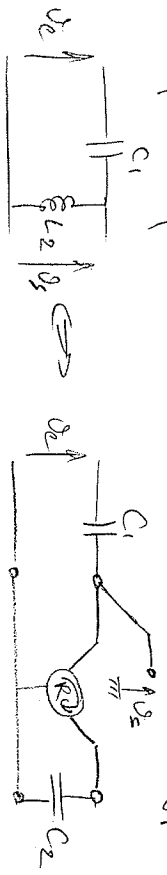
$Z_e = \frac{R^2}{Z_c} = R^2 C P$

ce qui peut s'écrire : $Z_e = L P$

l'impédance d'entrée est donc équivalente à une inductance $L = R^2 C$.

ex d'utilisation : Si on réalise gyrateurs

un filtre passe-bas du 2^{ème} ordre du type :

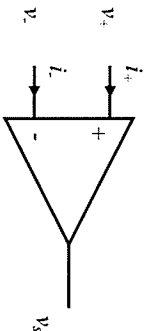


CHAPITRE X
SYNTHESE DES FILTRES ACTIFS
EN CASCADE DE CELLULES A.A.O.P
ET A INTEGRATEUR

On a vu qu'il existait de multiples méthodes de synthèse des filtres actifs. Parmi celles succinctement présentées dans le chapitre précédent, nous ne détaillerons que les cellules utilisant un seul amplificateur opérationnel à contre réaction positive simple du type Salten-key et celles à cellules à intégrateur multiple (à variables d'état).

1. RAPPELS SUR LES MONTAGES A AMPLIFICATEURS OPERATIONNELS PARFAITS

Nous nous limiterons à la description rapide de quelques montages de base utilisant un amplificateur opérationnel parfait (A.O.P.)



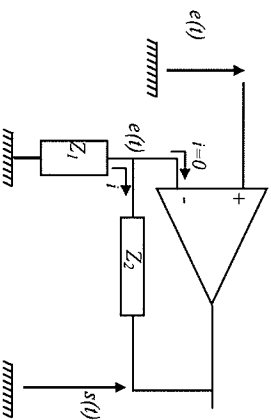
Un A.O.P. parfait est amplificateur différentiel dont les impédances d'entrée et le gain sont infinis. La sortie vaut: $V_s = G(V_+ - V_-)$

Pour avoir $v_s \neq \infty$ (ou $\pm V_{lim}$), il faut que $V_+ = V_-$.

De plus les impédances d'entrée sont infinies et les courants d'entrée i_+ et i_- donc nuls : $i_+ = i_- = 0$

1°) Amplificateur de gain positif

Un amplificateur de gain positif peut être conçu comme suit :



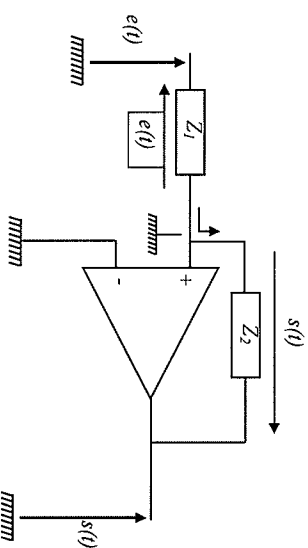
On a $v_+ = v_- \iff v_- = e$ or $e = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} s$

$$\iff s = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) e$$

et si $Z_1 = R_1$ et $Z_2 = R_2$ alors $s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) e$

2°) Amplificateur de gain négatif

Un amplificateur de gain négatif peut être conçu comme suit :



$v_+ = v_- = 0 \iff \frac{e}{Z_1} = -\frac{s}{Z_2}$

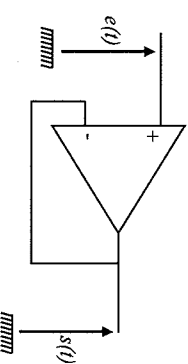
$$\iff s = -\frac{Z_2}{Z_1} e$$

si $Z_1 = R_1$ et $Z_2 = R_2$ alors

$$\frac{s}{e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

3°) Montage suiveur

Un montage de fonction de transfert unité peut être réalisé comme suit :



On a en effet $v_+ = v_- = e$ et $s = v_-$ d'où $s = e$. Ce montage possède une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle. Il rend tout montage placé à sa gauche indépendant de la charge placée à sa sortie.

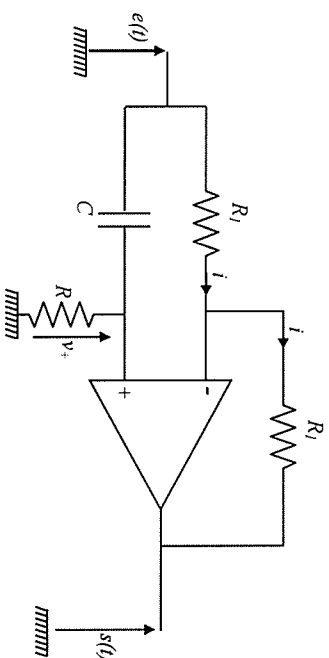
II. CELLULE PASSE-TOUT

Une cellule passe tout d'ordre 1 possède par exemple une fonction de transfert du type :

$$H(p) = \frac{1 - RCp}{1 + RCp}$$

ce qui donne un gain de : $|H(\omega)| = 1$ et une phase de : $\arg(H) = -\arctg(RC\omega)$

Un exemple de réalisation donne :



Vérification par le calcul.

on a $e - v_- = R_1 i$ et $v_- = v_+ = \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}} e = \frac{RCp}{1 + RCp} e$

cad : $e \left(1 - \frac{RCp}{1 + RCp} \right) = R_1 i$

de plus : $e - s = 2R_1 i$ d'où $e \left(1 - \frac{RCp}{1 + RCp} \right) = \frac{e - s}{2}$

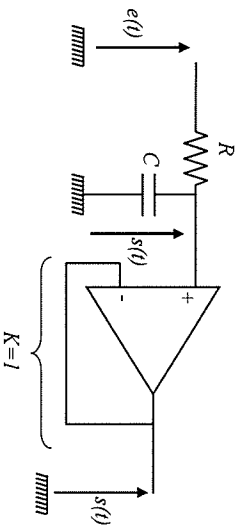
d'où $\frac{s}{e} = 1 - \frac{2RCp}{1 + RCp}$ cad $H(p) = \frac{s}{e} = \frac{1 - RCp}{1 + RCp}$

Ces cellules sont utilisées pour déphaser le signal d'entrée. Le déphasage dépend des valeurs de R et C.

III. CELLULES DU 1^{ER} ORDRE

1^o) Passe Bas

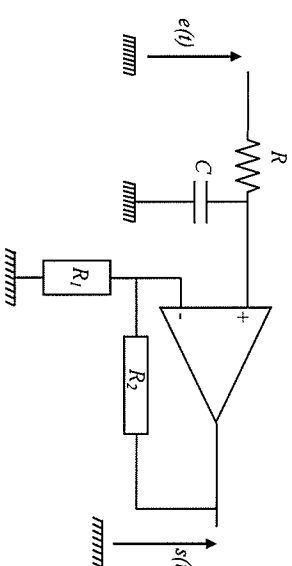
Un exemple de réalisation d'une cellule passe bas est donné ci-dessous.



La fonction de transfert vaut : $H(p) = \frac{s}{e} = \frac{1/CP}{R + 1/CP}$ c'est-à-dire $\left| H(p) \right| = \frac{1}{1 + RCp}$

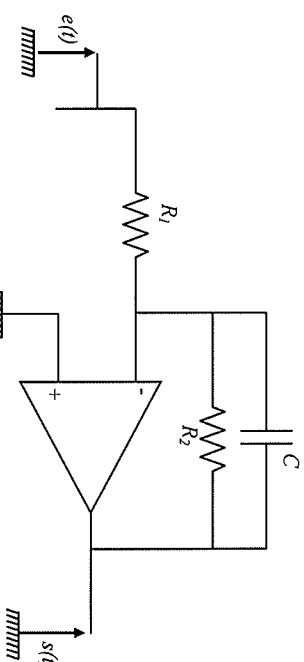
L'intérêt du suiveur placé en sortie est d'avoir une impédance de sortie très faible par rapport à la simple cellule RC. Le filtre devient alors indépendant de l'étage suivant.

Le montage suivant est aussi un filtre du 1^{er} ordre mais son gain est supérieur à 1 :



Sa fonction de transfert vaut : $H(p) = (1 + \frac{R_2}{R_1}) \frac{1}{1 + RCp}$ [de gain continu ($\omega \rightarrow 0$) $\left| K = (1 + \frac{R_2}{R_1}) \right|$]

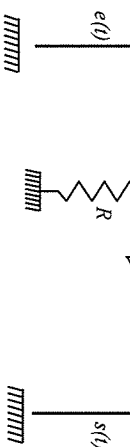
Le montage suivant est un passe bas de gain négatif :



En effet, on a $s = \frac{-R_2 // C}{R_1} e$ c'est-à-dire $H(p) = \frac{-R_2 / Cp}{R_2 + 1/Cp} \frac{1}{R_1}$ ce qui donne : $H(p) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + R_2 Cp}$ [de gain continu $K = -R_2 / R_1$]

2^o) Passe Haut

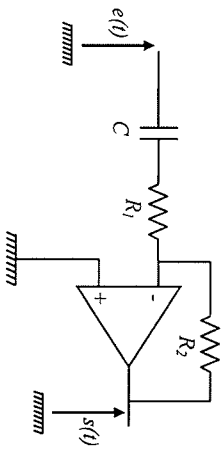
Un filtre passe haut peut être lui aussi réalisé de différentes façons.



de fonction de transfert $H = K \frac{RCp}{1 + RCp}$

où K est le gain de l'amplificateur placé en sortie.

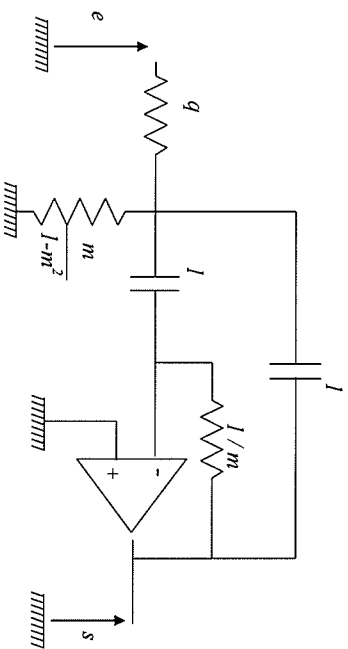
Ou encore comme suit :



de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{-R_2}{R_1 + 1/Cp} = \frac{-R_2 Cp}{1 + R_1 Cp}$$

3°) Passif Bande normalisée de Rauch



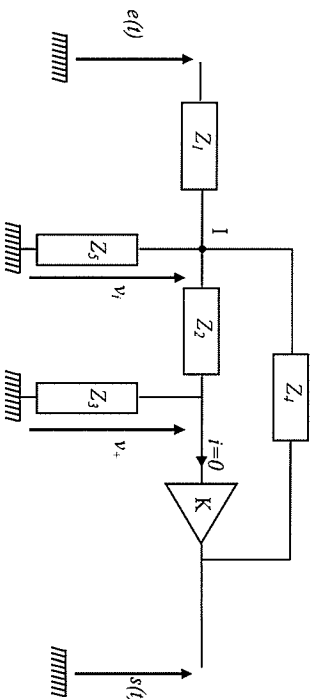
Sa fonction de transfert normalisée vaut : $H = \frac{m p_n}{p_n^2 + 2m p_n + 1}$ d'amortissement $\zeta = m$ et de pulsation

naturelle normalisée $\omega_n = 1$ et de gain max $G_m = \frac{1}{4}$.

IV. CELLULES DU 2^{ème} ORDRE

1°) Structure générale des cellules de base de Sallen-Key

Considérons la structure suivante :



On a : $s = K v_+$ (1)

On écrit que la somme des courants incidents au point I est nul :

$$(v_1 - e) Y_1 + (v_1 - s) Y_4 + v_1 Y_5 + v_1 \frac{1}{Z_2 + Z_3} = 0 \quad (2)$$

On note : $Y_i = 1/Z_i$, et $Y_i = \frac{1}{Z_2 + Z_3}$

On a : $v_+ = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_4} v_1 = \frac{Y_2}{Y_2 + Y_4} v_1$

$$\text{d'où : } v_1 = \frac{Y_2 + Y_3}{Y_2} v_+ = \frac{Y_2 + Y_3}{Y_2} \frac{s}{K} \quad (3)$$

L'équation (2) se met sous la forme suivante : $v_1 (Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_1) - s Y_4 = e Y_1$ (4)

On injecte (1) et (3) dans (4) : $s \left(\frac{(Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_1)(Y_2 + Y_3)}{K Y_2} - Y_4 \right) = e Y_1$

d'où finalement $H(p) = \frac{K Y_2 Y_1}{(Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_1)(Y_2 + Y_3) - K Y_2 Y_4}$

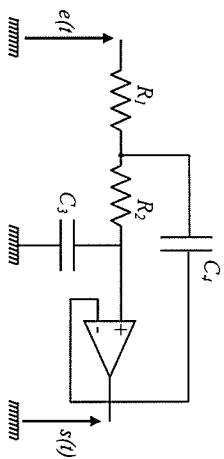
2°) Cellule de base du Passif Bande de Sallen-Key

On remplace dans la cellule précédente :

$$Y_1 = 1/R_1 ; Y_2 = 1/R_2 ; Y_3 = C_3 p ; Y_4 = C_4 p ; K = 1$$

On a alors :

$$H(p) = \frac{1}{R_1 R_2 C_3 C_4 p^2 + [C_3 (R_1 + R_2) + C_4 (1 - K) R_1] p + 1}$$

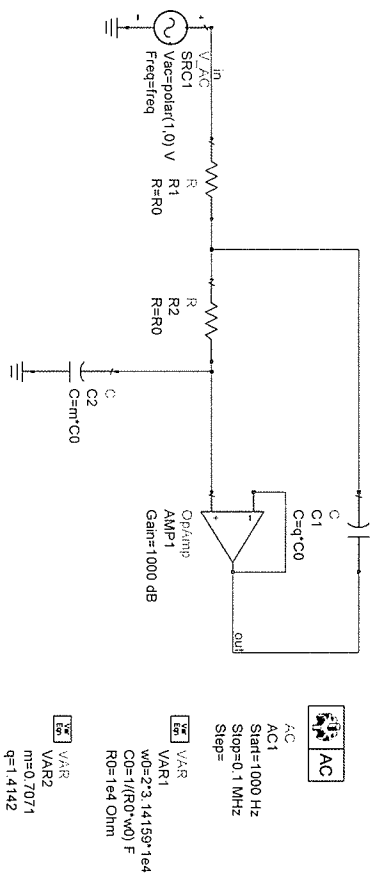


Si on pose : $R_1 = R_2 = R_0$; $C_3 = m C_0$ et $C_4 = q C_0$ on a alors : $H(p) = \frac{1}{mq(R_0 C_0)^2 p^2 + 2m C_0 R_0 p + 1}$

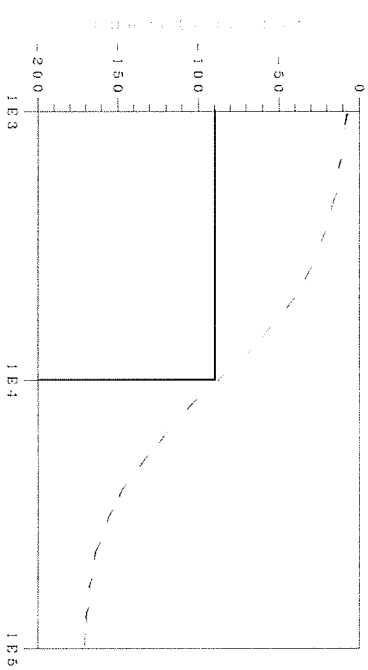
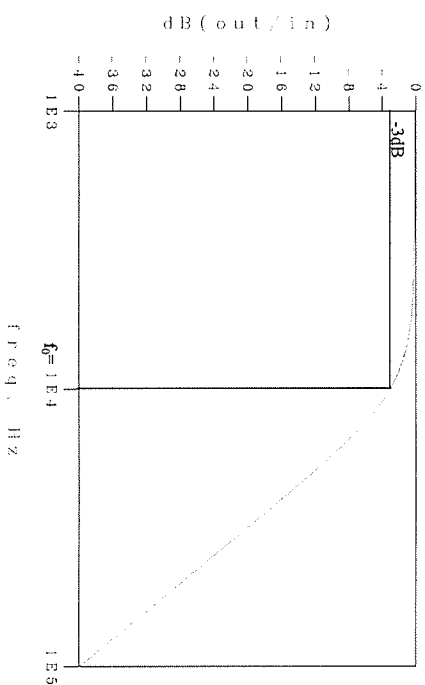
La pulsation naturelle est égale à $\omega_N = \frac{1}{R_0 C_0 \sqrt{mq}}$ et le coefficient d'amortissement $\zeta = \sqrt{\frac{m}{q}}$ ce qui correspond à un coefficient de qualité $Q = \frac{1}{2\zeta} \sqrt{\frac{q}{m}}$

on a alors $H(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_N}\right)^2 + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1}$

La figure suivante montre le schéma de simulation d'un filtre Passe Bas de Salen Key de Butterworth.



Sa réponse fréquentielle est figurée ci-dessous.



Son gain passe par -3dB à la fréquence $f_0=10^4$ Hz et sa phase à -90°

2°) Cellule normalisée Passe Bas de Salen-Key

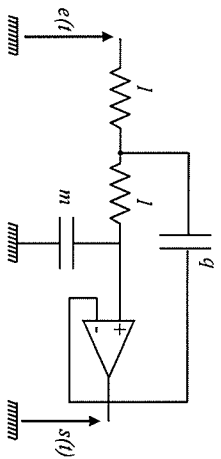
Dans le but de normaliser le filtre ainsi construit, il faut choisir une impédance et une pulsation de normalisation. Prenons par exemple R_0 comme impédance de normalisation et $\omega_0 = 1/R_0 C_0$ comme pulsation de normalisation. Les valeurs normalisées des résistances et de C_0 valent alors :

$r_1 = r_2 = \frac{R_0}{R_0} = 1$ et $c_0 = C_0 \omega_0 R_0 = 1$

d'où la valeur normalisée de $C_3 = m C_0$ et de $C_4 = q C_0$: $c_3 = m$ et $c_4 = q$

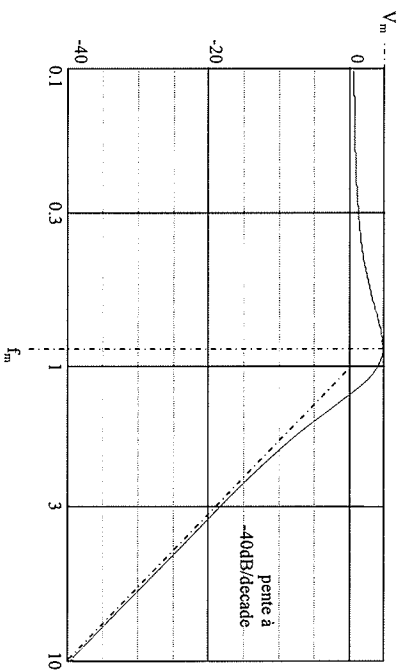
La fonction de transfert en variable normalisée devient : $H(p) = \frac{1}{mq p_n^2 + 2m p_n + 1}$ avec $p_n = \frac{p}{\omega_0}$,
 expression que l'on retrouve dans les tableaux de Salen-Key fourni en TD.

Le schéma électrique de la cellule de Salen-Key normalisé est donc :



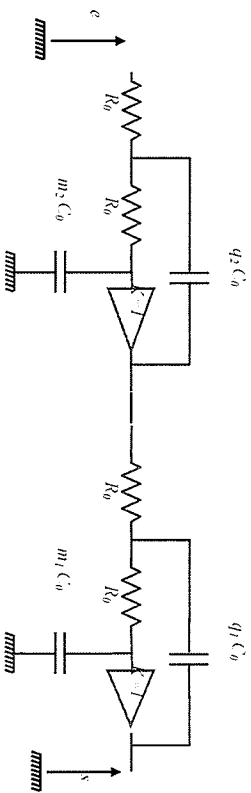
On voit d'après la fonction de Transfert $H(p) = \frac{1}{mq p_n^2 + 2m p_n + 1}$, que la pulsation normalisée

$\omega_n = 1/\sqrt{mq}$ et l'amortissement $\zeta = \sqrt{m/q}$ dépendent uniquement des valeurs de m et de q. La résonance est donc plus ou moins marquée voire inexistante si la réponse du filtre le nécessite.



Passes Bas de Sallen-Key : exemple Passe Bas de Butterworth d'ordre 4

$$H = \frac{1}{p_n^4 + 0.7653 p_n^3 + 1.8477 p_n^2 + 1}$$

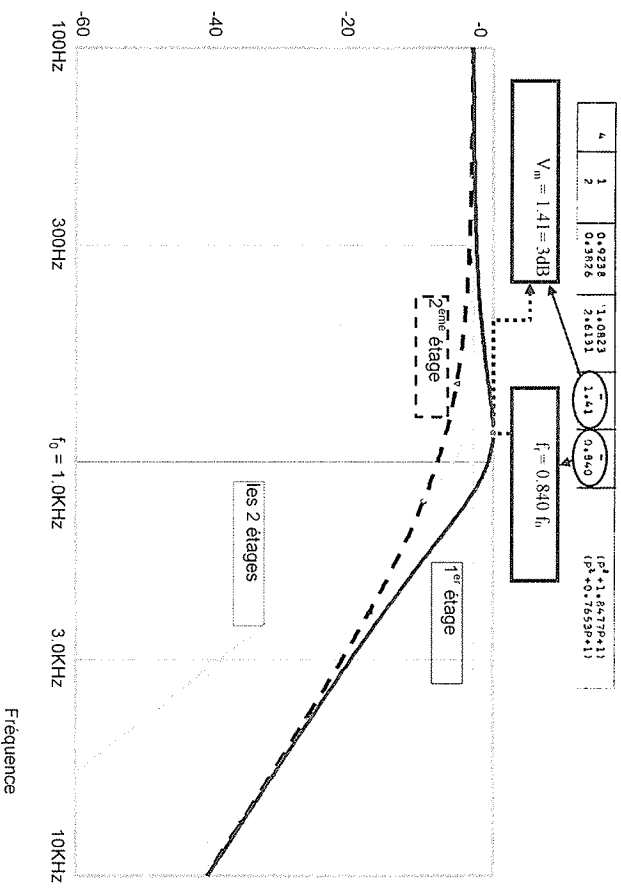


$m_2 = 0.3826 ; q_2 = 2.6131$

$G(\omega = 0.840 \omega_0) = V_m = 1.41$

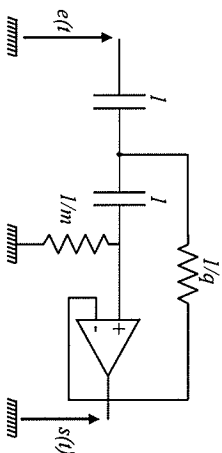
Les Q élevé en tête

$m_1 = 0.9238 ; q_1 = 1.0823$



4°) cellule normalisée Passe Haut de Salen Key

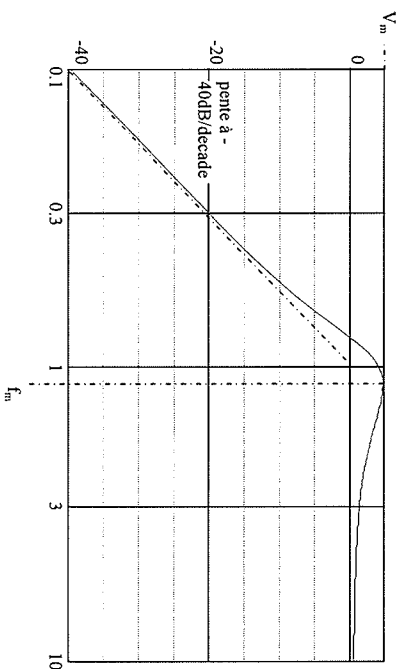
De la même manière on définit la cellule de base du 2^{ème} ordre d'un filtre Passe Haut de Salen Key :



De fonction de Transfert : $H(p) = \frac{P_n^2 / (mq)}{P_n^2 + 2 \frac{P_n}{mq} + 1}$ de pulsation naturelle $\omega_n = \sqrt{mq}$ et d'amortissement

$$\zeta = \sqrt{m/q}$$

La réponse fréquentielle est la suivante :



à suivre.....

(voir transparents de cours)