

# *Traitement des Signaux Analogiques*

*Thierry Ditchi*  
*Janvier 2025*



## Table des matières

I.	Introduction	5
II.	Les systèmes linéaires	7
III.	Etude des systèmes linéaires par Transformée de Laplace ou de Fourier	9
IV.	Systèmes du 1 <sup>er</sup> et du 2 <sup>nd</sup> ordre	11
V.	FILTRAGE	13
1.	Introduction	13
2.	Gabarits - Normalisation - Transposition	14
A.	Filtre idéal	14
B.	Gabarits	16
C.	Normalisation	17
D.	Transposition de fréquence	21
3.	Calcul de la fonction de transfert $H(p)$ à partir du gain $ H(\omega) $	32
A.	Stabilité des systèmes linéaires	32
B.	Quelques propriétés de la réponse fréquentielle	40
C.	Calcul de $H(p)$ à partir du module de $H(\omega)$	43
4.	Filtres Prototypes	46
A.	Introduction	46
B.	Distorsion des signaux	47
C.	Filtres de Butterworth	47
D.	Filtres de Chebychev	51
E.	Filtres de Legendre (Papoulis)	54
F.	Filtres de Cauer	56
G.	Filtres de Bessel (Thomson)	57
H.	Filtres Gaussien	61
I.	Comparaison des filtres	62
5.	Synthèse des filtres passifs	64
A.	Filtres Passe-bas	64
B.	Filtres Passe-haut	65
C.	Filtres Passe-bande	67
D.	Filtres Coupe-bande	70
6.	Synthèse des filtres actifs	74
A.	Introduction	74
B.	Rappels sur les amplificateurs opérationnels parfaits et quelques montages classiques.	75
C.	Filtres à intégrateur	78
D.	Filtres de Sallen-Key	79
7.	Synthèse avancée des filtres actifs	88

VI.	Autres systèmes de Traitement des signaux	94
1.	Mélangeurs – Transposition de fréquence	94
A.	Mélangeur parfait ou multiplieur	94
B.	Mélangeurs réels	94
2.	Oscillateurs – PLL - Synthétiseurs	94
VII.	Modulations	95
1.	Introduction	95
2.	Modulation d'amplitude	95
3.	Modulation de Fréquence	95
4.	Modulation de Phase	95
5.	Modulation IQ	95
VIII.	Architecture d'un émetteur – récepteur	96
1.	Emetteur	96
2.	Récepteur homodyne	96
3.	Récepteur hétérodyne	96
IX.	Détecteur synchrone	97

## I.Introduction

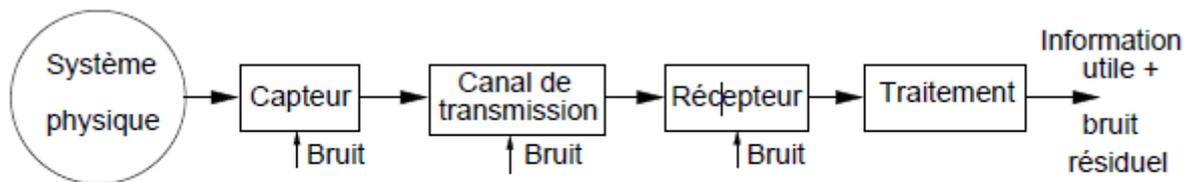
Le traitement du signal est un ensemble de techniques et de méthodes permettant de recueillir l'information contenue dans un signal et de le mettre sous une forme exploitable.

L'exploitation des signaux analogiques nécessite un certain nombre d'opérations de conditionnement, d'amplification, de filtrage, de transposition de fréquence, avant de pouvoir être numérisés puis traités par des méthodes numériques. Les signaux analogiques peuvent provenir de sources très diverses, mais la plupart sont des signaux électriques ou devenus électriques à l'aide de capteurs (microphone, antennes, thermiques, optiques, de pression, de position, de vitesse, d'accélération etc...)

Parce qu'elles s'appliquent à toutes les étapes d'une chaîne d'acquisition, d'analyse, de transfert et de restitution des données, les techniques du traitement du signal trouvent des applications dans tous les domaines de la technologie tels que les télécommunications, le transport, l'imagerie médicale, la robotique, les radars, la géophysique, la protection de l'environnement, la biologie, l'économie, la mécanique, la cosmologie etc...

Les points suivants seront abordés dans le cours :

- Filtrage analogique – Théorie du filtrage et synthèse de filtres basses et hautes fréquences
- Modulations AM, FM, Phase, IQ – techniques de démodulation
- Chaîne de réception en télécommunication - transposition de fréquence - montages homodyne et hétérodyne - fréquence image
- Extraction d'un signal noyé dans du bruit - détection synchrone



Synoptique d'une chaîne classique de traitements d'un signal.



## II. Les systèmes linéaires

Voir l'ancien polycopié en ligne



### III. Etude des systèmes linéaires par Transformée de Laplace ou de Fourier

Voir l'ancien polycopié en ligne



## IV. Systèmes du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre

Voir l'ancien polycopié en ligne



## V.FILTRAGE

### 1. Introduction

Un filtre en électronique est un système ou un programme dont le rôle est de modifier le contenu spectral des signaux le traversant. Le but peut être d'extraire une partie de l'information contenu dans le signal, d'éliminer des parasites le perturbant... Un filtre analogique est plus souvent un sélecteur de fréquence alors que les filtres numériques ont comme but plus général de transformer le signal (sélecteur de fréquence, fabrication d'échos, transformation de la voix...).

Nous ne nous intéresserons dans ce cours qu'au filtrage analogique passif ou actif, basse fréquence ou haute fréquence. On rencontre ces filtres dans de nombreux domaines :

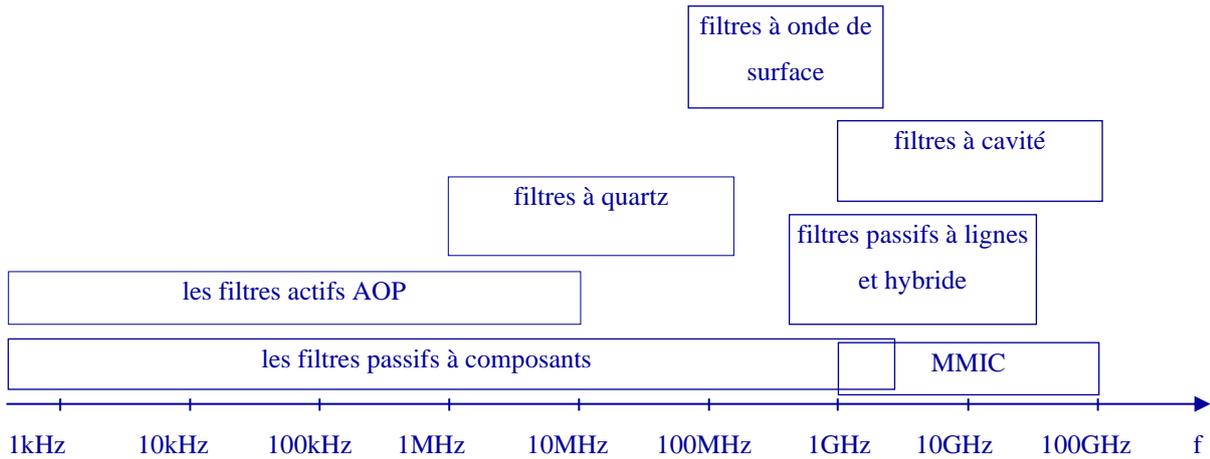
- radiocommunication : sélection de bande...
- analyse spectrale
- élimination de bruit
- sélecteur de fréquence en sortie de mélangeur, oscillateur ou autre circuit non linéaire
- ...etc

Les technologies utilisées en filtrage analogique sont très nombreuses et dépendent en général de la gamme de fréquences concernée.

- En dessous de quelques MHz, les filtres actifs utilisant des amplificateurs opérationnels (AOP) sont très utilisés. Ils ont l'avantage de ne pas nécessiter de bobine dont le prix, l'encombrement ou le poids sont importants à fréquence basses.
- En haute fréquence, au-delà de quelques MHz, les filtres passifs utilisant des condensateurs et des bobines deviennent intéressants. En hyperfréquence, de 1 à 100 GHz, c'est pratiquement la seule technologie utilisable. A ces fréquences, les composants peuvent être soudés sur des circuits imprimés (technologie hybride), ils peuvent être imprimés sur le circuit (bobine spirales, condensateurs interdigités...etc) ou être synthétisés en utilisant les propriétés des lignes de transmission (filtres à constantes réparties).
- A toute fréquence, on peut utiliser des technologies intégrées dans laquelle les lignes et les composants passifs ou actifs sont tous fabriqués sur le même substrat.

Il existe d'autres technologies que celles utilisant des condensateurs, des bobines et des AOP :

- les filtres à quartz (ou autres matériaux piézoélectrique) de qq MHz à 100 MHz
- les filtres à ondes de surface (SAW) sur matériaux piézo-électrique de 100 MHz à qq GHz
- les filtres à cavité métallique ou diélectrique de qq GHz à qq 100 GHz



## 2. Gabarits - Normalisation - Transposition

### A. Filtre idéal

On classe les filtres selon la bande de fréquence qu'ils laissent passer.

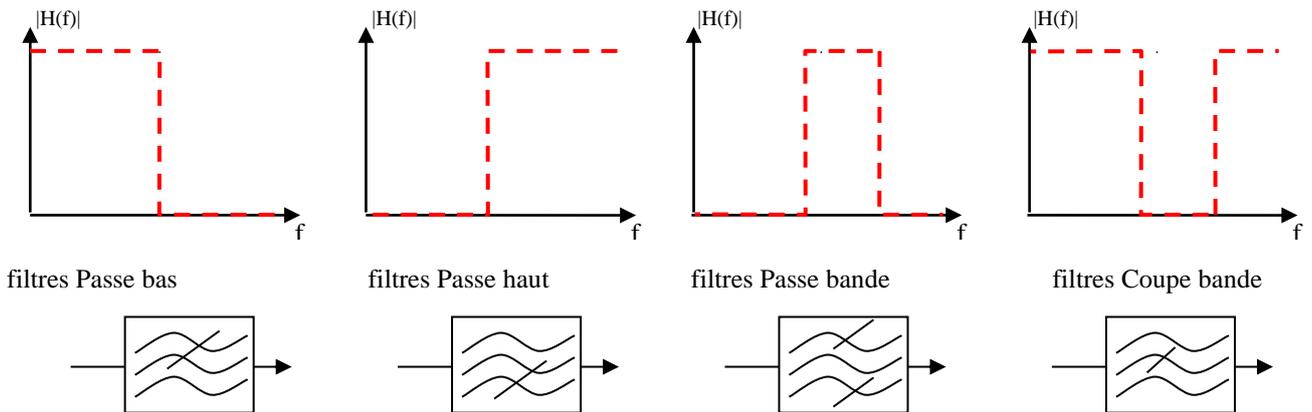


Figure 1 : Différent types de filtre

Ces filtres, tels qu'ils sont tracés ci-dessus, sont idéaux. Les coupures sont infiniment rapides... On peut se poser la question : ces filtres parfaits sont-ils réalisables ?

Pour répondre à cette question, cherchons la réponse impulsionnelle d'un tel filtre idéal. Prenons par exemple la réponse fréquentielle d'un filtre passe bas parfait tel que tracé ci-dessus :

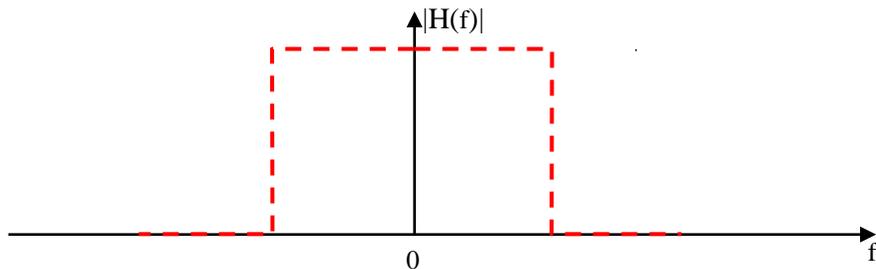


Figure 2 : module de la réponse fréquentielle d'un filtre passe bas idéal

On peut calculer la réponse impulsionnelle, à partir de la réponse fréquentielle par une transformée de Fourier inverse :

$$h(t) = TF^{-1}(H(f))$$

Comme on ne s'est imposé que le module de  $H(f)$ , il reste à choisir une phase pour pouvoir calculer  $h(t)$ . Commençons par choisir une phase constamment nulle comme sur la Figure 3 en bleu.

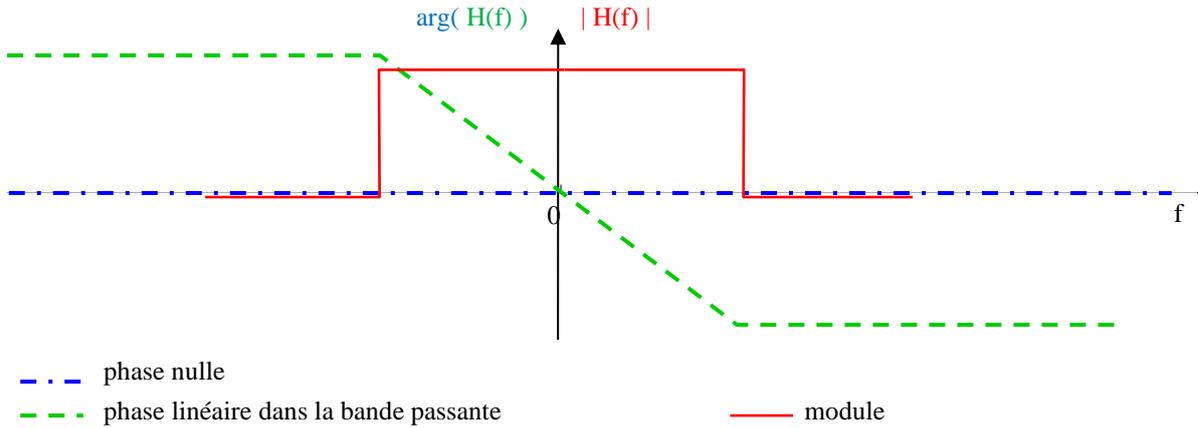


Figure 3 : Module et argument de la réponse fréquentielle d'un filtre passe bas idéal

En calculant la Transformée de Fourier inverse de la réponse fréquentielle à phase nulle (phase en bleu), on trouve la réponse impulsionnelle suivante (Figure 4 en bleu) :

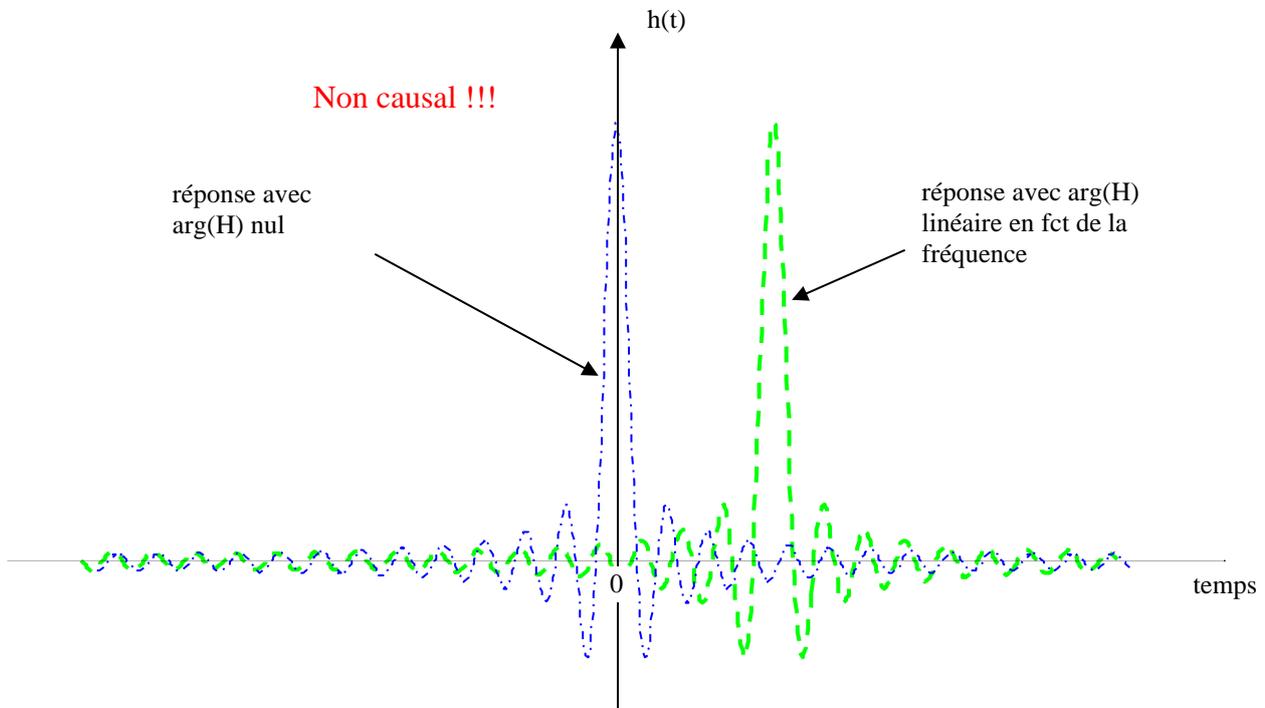


Figure 4 : réponses impulsionnelles correspondantes à un filtre idéal avec différents  $\arg(H(f))$

La réponse commence avant que l'impulsion ne soit injectée dans le filtre (à  $t=0$ ) !!! La réponse impulsionnelle obtenue est donc non causale et physiquement impossible.

Si on choisit une phase de  $H(f)$  variant linéairement comme tracé à la Figure 3 en vert, on obtient là aussi une réponse impulsionnelle non causale (Figure 4 en vert).

Un filtre idéal est donc impossible à réaliser. Le futur utilisateur du filtre doit donc tenir compte de cela et assouplir ses exigences. C'est la raison pour laquelle le cahier des charges est traduit sous la forme d'un gabarit laissant certaines latitudes.

## B. Gabarits

Un gabarit définit des zones de fréquences dans lesquelles le gain doit respecter certaines propriétés. Il est représenté comme suit :

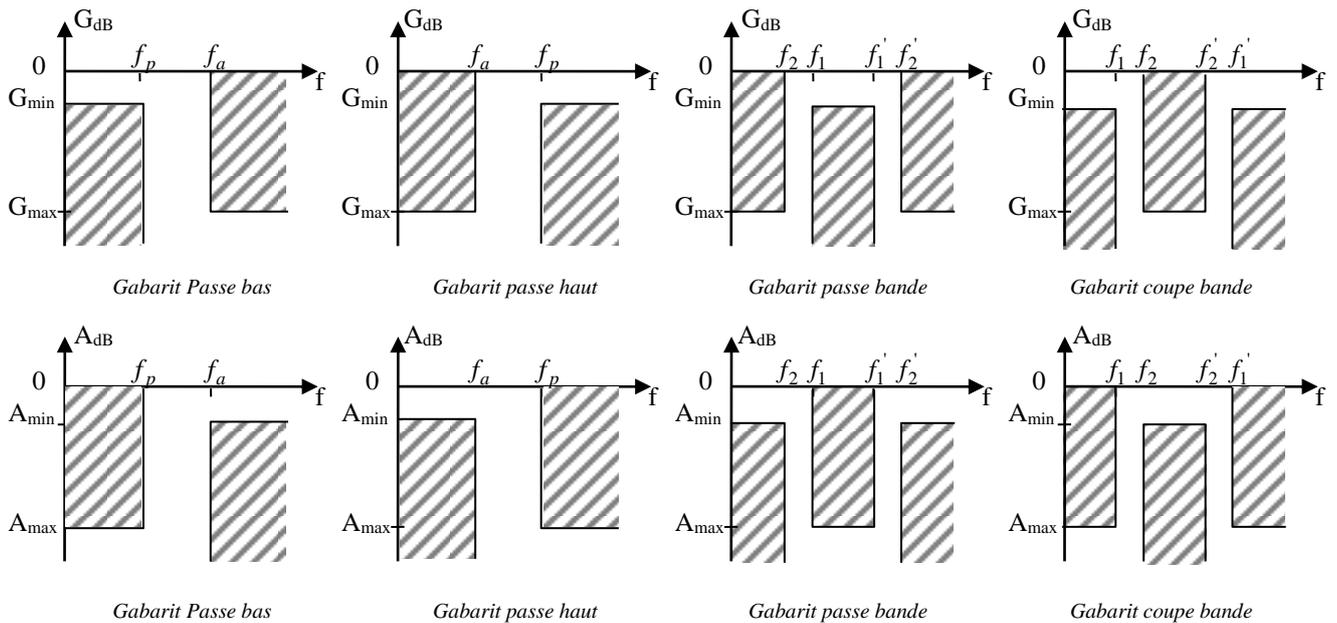


Figure 5: Différents types de gabarits en gain (en haut) ou en atténuation (en bas)

où,

- pour un filtre passe bas ou passe haut,  $f_p$  est le bord de bande passante,  $f_a$  est le bord de bande atténuée,
- pour un filtre passe bande ou coupe bande  $f_1$  et  $f_1'$  sont les bords de bande passante et  $f_2$  et  $f_2'$  sont les bords de bande coupée.
- $G_{min}$  est le gain minimum que l'utilisateur exige dans la bande passante et  $G_{max}$  le gain maximum accepté dans les bandes coupées.

On définit la sélectivité  $k$  comme :

$$k = \frac{f_p}{f_a} \text{ pour un filtre passe bas, } k = \frac{f_a}{f_p} \text{ pour un filtre passe haut,}$$

$$\text{et, } k = \frac{f_1' - f_1}{f_2' - f_2} \text{ pour un filtre passe bande, } k = \frac{f_2' - f_2}{f_1' - f_1} \text{ pour un filtre coupe bande.}$$

$k \in ]0 ; 1]$  : La sélectivité vaut 1 pour un filtre parfait qui coupe infiniment rapidement, et est inférieure à 1 sinon.

Il faut noter que la sélectivité seule ne renseigne pas sur la rapidité de coupure d'un filtre. Il faut préciser en plus les valeurs de  $G_{max}$  et  $G_{min}$ .

### C. Normalisation

Il est commode de travailler avec des fréquences et des impédances normalisées de façon à pouvoir comparer les caractéristiques de différents filtres. Par exemple, les filtres suivants ont des propriétés identiques excepté leur fréquence de travail.

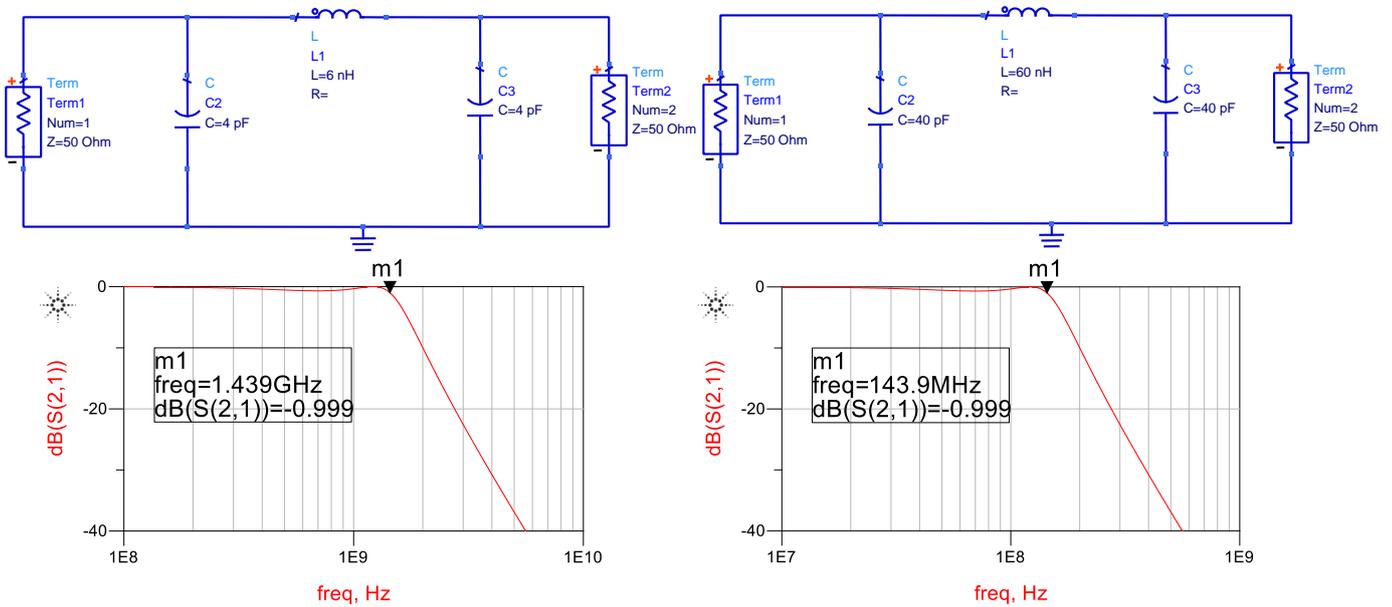


Figure 6 : Filtres ayant des propriétés identiques mais à des fréquences différentes

Ces 2 filtres du 3eme ordre ont en effet les mêmes types de réponse mais l'un possède une bande passante à -1dB de 1.439 GHz et l'autre de 143.9 MHz.

De plus, pour fabriquer un filtre respectant un cahier des charges précis sans devoir refaire tous les calculs, on pourra utiliser des tableaux dans lesquels on trouvera les valeurs de paramètres permettant de construire des filtres de propriétés connues. On appelle ces filtres pré-calculés, des filtres prototypes. Ces filtres ont été normalisés, ce qui les rend indépendant de la fréquence. Ils sont classés, entre autres paramètres, en fonction de leur sélectivité et des gains  $G_{max}$  et  $G_{min}$  associés. Pour fabriquer un filtre, il faut choisir le prototype en fonction de ses caractéristiques recherchées, de la sélectivité désirée et des gain max et min désirés, avant de dénormaliser les impédances à la fréquence ciblée.

Pour toutes ces raisons, il est utile de définir la fréquence et l'impédance normalisée.

#### a. Normalisation de la fréquence

Pour normaliser les fréquences, il faut d'abord définir une fréquence de référence notée  $f_0$ .

Pour un filtre passe bas ou passe haut, la fréquence de référence est le bord de bande passante :  $f_0 = fp$ .

Pour un filtre passe bande ou coupe bande, la fréquence de référence est la "fréquence centrale" :  $f_0 = \sqrt{f_1 \times f_1'}$  et  $\omega_0 = 2\pi f_0$

On définit alors la fréquence normalisée  $\omega_n$  :  $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$

et la variable de Laplace normalisée :  $p_n = \frac{p}{\omega_0}$

La fonction de transfert normalisée s'obtient alors comme le montre l'exercice suivant :

Exercice : Calculer la fonction de transfert normalisée du filtre  $H(p) = \frac{1}{1+RCp}$  en prenant comme fréquence de référence  $f_0$ .

On remplace  $p$  par  $p_n \times \omega_0$  dans la fct de transfert  $H(p)$ , et on obtient :  $H(p_n) = \frac{1}{1+RC\omega_0 p_n}$

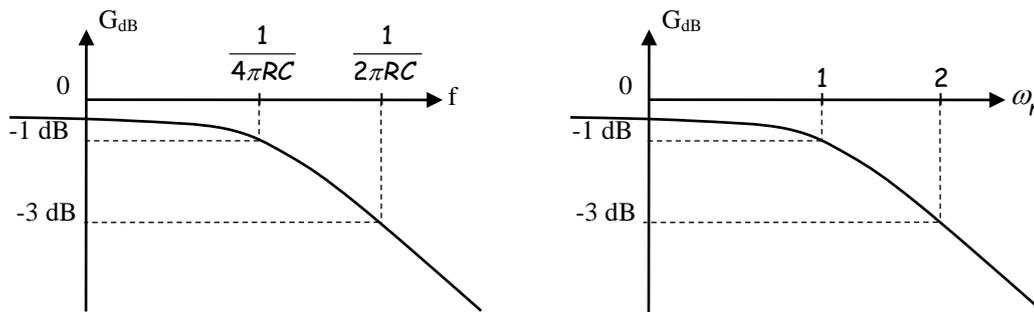
Exercice : Calculer la fonction de transfert normalisée à -1 dB du filtre  $H(p) = \frac{1}{1+RCp}$ .

Pour normaliser la fonction de transfert il faut d'abord déterminer la fréquence de référence  $f_0$ . D'après ce qui est demandé, la fréquence de référence est la fréquence pour laquelle l'atténuation vaut -1 dB.  $f_0$  est donc telle que :  $G(f_0) = G_{\max} - 1 \text{ dB}$ .

Le gain du filtre vaut :  $G(f) = 20 \log \left| \frac{1}{1+j2\pi RCf} \right| = -10 \log(1 + (2\pi RCf)^2)$  et le gain max est obtenu pour  $f = 0$  et vaut :  $G_{\max} = 0 \text{ dB}$ .

Donc  $f_0$  est telle que :  $-10 \log(1 + (2\pi RCf_0)^2) = -1$  c'est à dire  $(2\pi RCf_0)^2 = 10^{0.1} - 1 \approx 0.26$  cad  $2\pi RCf_0 \approx \frac{1}{2}$  et donc  $\omega_0 = 2\pi f_0 \approx \frac{1}{2RC}$

On remplace  $\omega_0$  par sa valeur dans la fonction de transfert normalisée obtenu dans l'exercice précédent, et on obtient finalement :  $H(p_n) = \frac{1}{1+0.5 p_n}$



Réponse fréquentielle non normalisée (à gauche) et normalisée (à droite)



Remarque : la fréquence de référence d'un filtre n'est pas forcément la fréquence de coupure à -3dB !

### b. Normalisation des impédances

On choisit une impédance de référence notée  $R_0$ . Cette impédance peut être par exemple l'impédance de sortie du générateur (en général dans le cas des filtres HF), ou une autre valeur d'impédance.

On définit alors l'impédance normalisée ou réduite comme :

$$\mathfrak{z} = \frac{Z}{R_0} \quad (I.1)$$

On normalise également les valeurs des composants passifs comme les résistances, les inductances et les capacités.

#### α. Résistances

L'impédance d'une résistance  $R$  est égale à  $R$ . la valeur réduite de la résistance vaut donc :

$$r = \frac{R}{R_0} \quad (I.2)$$

β. Bobines

L'inductance d'une bobine est notée  $L$  et l'impédance vaut :  $Z_L = jL\omega$ . L'impédance réduite vaut donc :  $\mathfrak{z}_L = \frac{jL\omega}{R_0} = j \frac{L\omega_0}{R_0} \frac{\omega}{\omega_0} = j \frac{L\omega_0}{R_0} \omega_n$

L'inductance normalisée  $\ell$  est définie telle que :  $\mathfrak{z}_L = j\ell\omega_n$  et donc

$$\ell = \frac{L\omega_0}{R_0} \quad (I.3)$$

γ. Condensateurs

La capacité d'un condensateur est notée  $C$  et son admittance vaut :  $Y_C = jC\omega$ . L'admittance réduite vaut donc :  $y_C = jR_0C\omega = jR_0C\omega_0 \frac{\omega}{\omega_0} = jR_0C\omega_0 \omega_n$ .

La capacité normalisée  $c$  est définie telle que :  $y_C = jc\omega_n$  et donc

$$c = R_0C\omega_0 \quad (I.4)$$

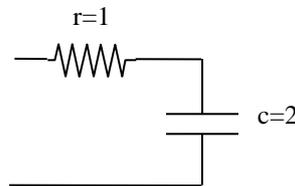
δ. Bilan

On a donc les formules de dénormalisation  $\boxed{R = r R_0} \boxed{L = \ell \frac{R_0}{\omega_0}} \boxed{C = \frac{c}{R_0\omega_0}}$  que l'on utilisera souvent pour calculer les valeurs des composants ( $R, L$  ou  $C$ ) à partir des valeurs normalisées ( $r, \ell$  ou  $c$ ) qu'on trouve dans les tableaux de filtres prototypes.

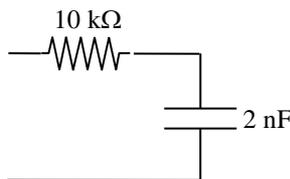
On utilise parfois la notion de capacité de référence  $C_0$ . Celle-ci est définie comme  $C_0$  telle que  $C = c C_0$ . On en déduit que  $C_0 = \frac{1}{R_0\omega_0}$ .  $C_0$  est plutôt utilisé en filtrage basse fréquence pour dénormaliser les filtres de Sallen-Key par exemple.

ε. Exercices

•Dénormiser le filtre suivant en prenant comme pulsation de référence  $\omega_0 = 10^5 \text{ rad/s}$  ( $f_0 = 15.9 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ ) et comme impédance de référence  $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$  :

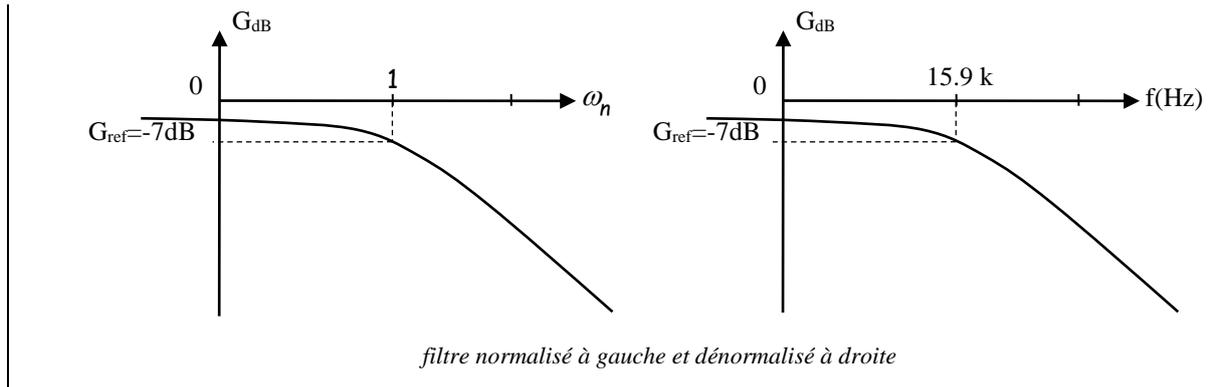


On a  $R = r R_0 = 10 \text{ k}\Omega$  et  $C = \frac{c}{R_0\omega_0} = 2 \text{ nF}$

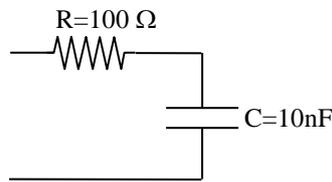


le filtre dénormalisé est donc :

et sa réponse fréquentielle est identique que celle du filtre normalisé au décalage de fréquence près :



• Calculer le filtre et la fonction de transfert normalisée à -1dB du filtre représenté ci-dessous. On choisira l'impédance de référence  $R_0 = 50 \Omega$



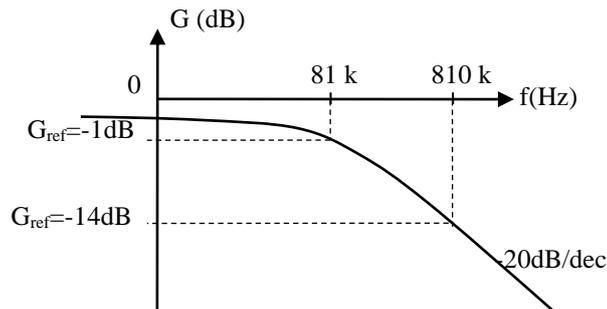
La fonction de transfert du filtre vaut :  $H(p) = \frac{1}{1+RCp} = \frac{1}{1+10^{-6}p}$

La réponse fréquentielle est :  $H(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{1}{1+j10^{-6}\omega}$

et son Gain :  $G(\omega) = 10\log\left|\frac{1}{1+jRC\omega}\right|^2 = -10\log(1 + 10^{-12}\omega^2)$

Le filtre doit être normalisé à -1dB, ce qui signifie qu'à la fréquence de référence  $f_0$  le gain doit être de -1dB. Après calcul on trouve  $f_0=81 \text{ kHz}$ .

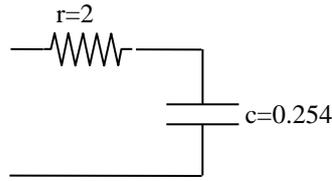
A la fréquence 810 kHz le gain passe à -14.3dB. Son gain est représenté sur la figure ci-dessous :



Pour normaliser le filtre, on doit calculer les composant normalisé. On a, en prenant  $R_0 = 50 \Omega$  et  $f_0 = 81 \text{ kHz}$ ,

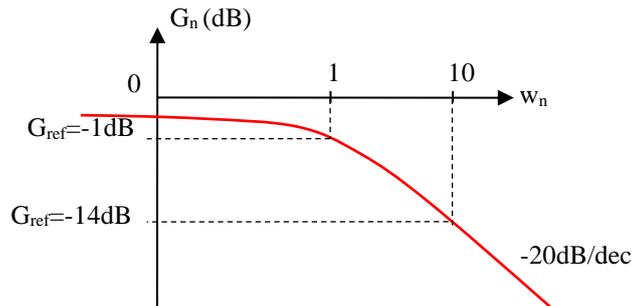
$r = \frac{R}{R_0} = 2$  et  $c = R_0 C \omega_0 = 0.254$ .

le filtre normalisé devient



et la fonction de transfert calculée à partir du schéma normalisé vaut  $H(p_n) = \frac{1}{1+rcp_n} = \frac{1}{1+0.51p_n}$

et le gain du filtre normalisé à la même forme que le gain du filtre départ, mais avec l'axe des fréquences normalisé :



On peut retrouver directement  $H(p_n)$  en remplaçant dans  $H(p)$ ,  $p = \omega_0 p_n$  ;  $L = \ell \frac{R_0}{\omega_0}$  et  $C = \frac{c}{R_0 \omega_0}$ . On trouve alors

$$H(p_n) = \frac{1}{1+r R_0 \frac{c}{\omega_0 R_0} \omega_0 p_n} \text{ qui une fois simplifié devient } H(p_n) = \frac{1}{1+rcp_n}$$

*Remarque :* On notera que la fréquence de référence correspond ici à un gain de -1 dB et est différente de la fréquence de coupure à -3 dB notée  $f_c$  qui vaut ici 159 kHz.

## D. Transposition de fréquence

On désire fabriquer des filtres passe haut, passe bande ou coupe bande à partir des filtres normalisés passe bas dont le comportement a été étudié par d'autres personnes (filtres prototypes). On espère que les propriétés des filtres obtenus auront les mêmes caractéristiques que celles des prototypes.

### a. Transposition Passe bas -> Passe haut

#### α. Transposition de la fonction de transfert

La transformation qui permet de passer d'un filtre passe bas à un filtre passe haut est la suivante :

$$p_n \rightarrow 1/p_n \tag{I.5}$$

Par exemple, la fonction de transfert passe bas  $H(p_n) = \frac{1}{1+p_n}$  devient  $H'(p_n) = \frac{1}{1+\frac{1}{p_n}} = \frac{p_n}{p_n+1}$  qui est bien un filtre passe haut.

*Remarque :* On peut transposer directement la fonction de transfert passe bas non normalisée en faisant la transposition  $p \rightarrow \omega_0 \omega'_0 / p$ , où  $\omega_0$  est la pulsation de référence du filtre passe bas de départ et  $\omega'_0$  la pulsation de référence du filtre transposé passe haut. Mais en pratique, cela ne sert à rien puisqu'on dispose des prototypes normalisés passe bas, et il faut les transposer puis les dénormaliser pour synthétiser un filtre.

β. Transposition des composants normalisés

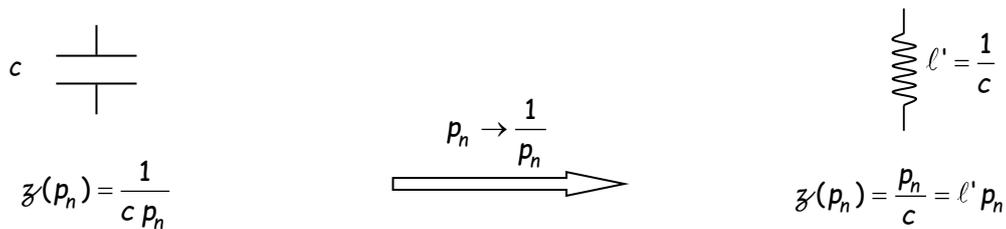
Comment sont transformés les composants passifs par la transposition proposées en (I.5) ?

• Résistances

La transformation (I.5) ne change rien aux résistances puisque l'impédance ne dépend pas de la fréquence.

• Condensateurs

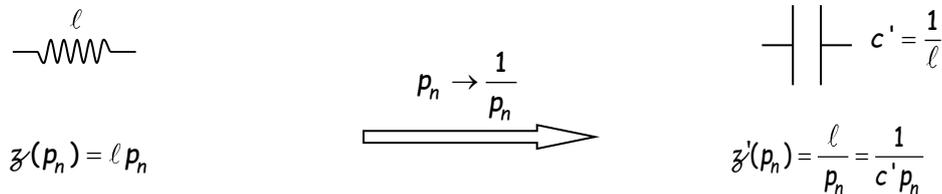
Par la transformation indiquée, l'impédance réduite d'un condensateur  $z(p_n) = \frac{1}{c p_n}$  devient  $z'(p_n) = \ell' p_n$



Un condensateur de capacité  $c$  se transforme donc en une bobine d'inductance  $\ell' = \frac{1}{c}$ .

• Bobines

Par la transformation indiquée, l'impédance réduite d'une bobine  $z(p_n) = \ell p_n$  devient  $z'(p_n) = \frac{\ell}{p_n}$



Une bobine d'inductance  $\ell$  se transforme donc en condensateur de capacité  $c' = \frac{1}{\ell}$ .

χ. Transposition des gabarits et des réponses fréquentielles

Prenons par exemple le filtre passe bas normalisé d'ordre 2 suivant :  $H(p_n) = \frac{1}{p_n^2 + 2p_n + 1}$

Sa réponse fréquentielle vaut :  $H(\omega_n) = \frac{1}{(1 - \omega_n^2) + 2j\omega_n}$  et son gain :  $G = -10\log((1 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2)$

à  $\omega_n = 1$ , son gain vaut :  $G(\omega_n = 1) = G_{ref} = -6 \text{ dB}$  et à  $\omega_n = 10$ , son gain vaut :  $G(\omega_n = 10) = G_{max} = -40 \text{ dB}$

Après transposition en passe haut on trouve :  $H'(p_n) = H(1/p_n) = \frac{1}{\frac{1}{p_n^2} + \frac{2}{p_n} + 1} = \frac{p_n^2}{1 + 2p_n + p_n^2}$

son gain vaut :  $10\log(\omega_n^4) - 10\log(4\omega_n^2 + (1 - \omega_n^2)^2)$

et son gain à  $\omega_n = 1$ , vaut :  $G'(\omega_n = 1) = -6 \text{ dB}$  et à  $\omega_n = 0.1$ ,  $G'(\omega_n = 0.1) = -40 \text{ dB}$

De façon plus générale, le gain des filtres par transposition est conservé :

$$G(\omega_n = 1) = G'(\omega_n = 1) \text{ et } G(\omega_n = 10) = G'(\frac{1}{\omega_n} = 0.1)$$

La Figure 7 montre les réponses fréquentielles du filtre passe bas et du filtre passe haut transposé.

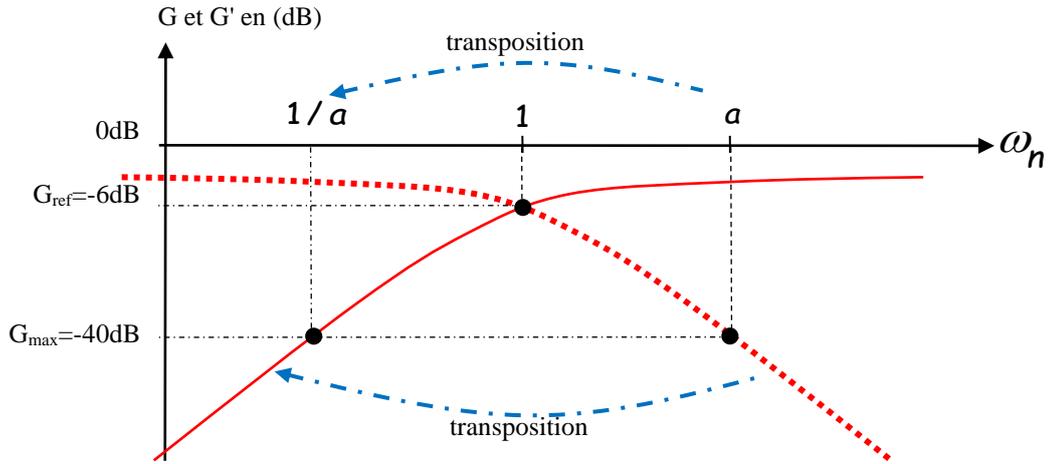


Figure 7 : Transposition de la réponse fréquentielle d'un filtre passe bas en un filtre passe haut

Et le gabarit se transpose comme le montre la Figure 8 .

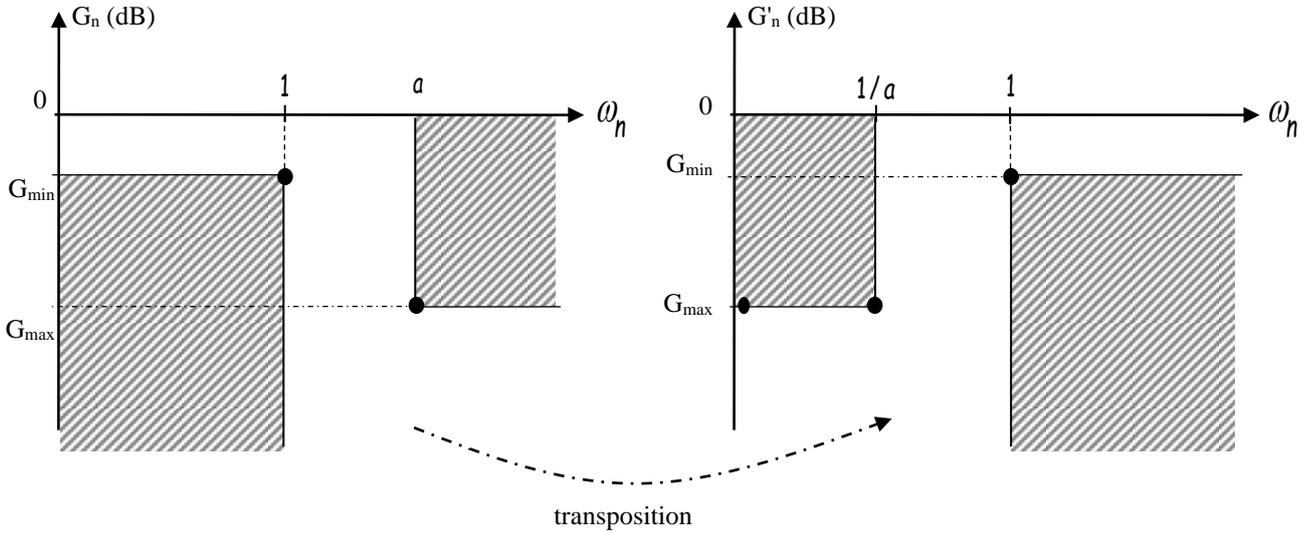
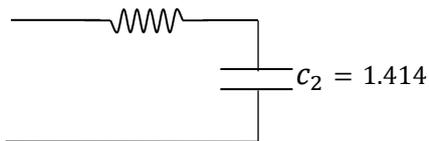


Figure 8 : gabarit passe bas normalisé et son transposé

δ. Exercice : Fabrication d'un filtre Passe Haut à partir d'un prototype passe bas

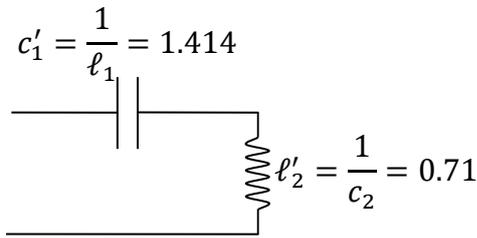
On désire synthétiser un filtre Phaut d'ordre 2 atténuant de 3 dB à 2 MHz à partir du prototype passe bas d'ordre 2 normalisé à -3 dB dont le schéma électrique et la fonction de transfert sont les suivants :

$$\ell_1 = 0.71$$



$$H(p_n) = \frac{1}{p_n^2 + 1.414p_n + 1}$$

Pour obtenir le filtre Phaut normalisé, on applique la transposition précédente, et le schéma électrique et la fonction de transfert du Phaut deviennent alors :

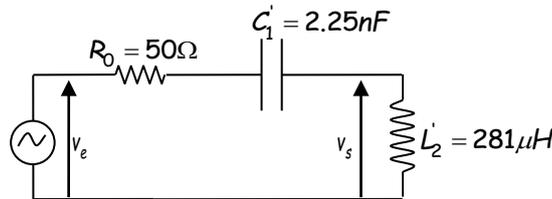


$$H'(p_n) = \frac{1}{1/p_n^2 + 1.414/p_n + 1} = \frac{p_n^2}{1 + 1.414p_n + p_n^2}$$

Puis on dénormalise le filtre Phaut normalisé. On doit prendre la fréquence pour laquelle on veut une atténuation de 13 dB comme fréquence de référence. C'est à dire  $f_0 = 2 \text{ MHz}$ . On choisit une impédance de référence  $R_0 = 50 \Omega$ .

On calcule les valeurs des 2 composants en utilisant les formules de dénormalisation (I.3) et (I.4) :

$$C'_1 = \frac{c'_1}{R_0 2 \pi f_0} = 2.25 \text{ nF} \quad \text{et} \quad L'_2 = \frac{\ell'_2 R_0}{2 \pi f_0} = 2.81 \mu\text{H}$$



La Figure 9 montre le Gain  $20 \log(\frac{v_s}{v_e})$  du prototype et du filtre final.

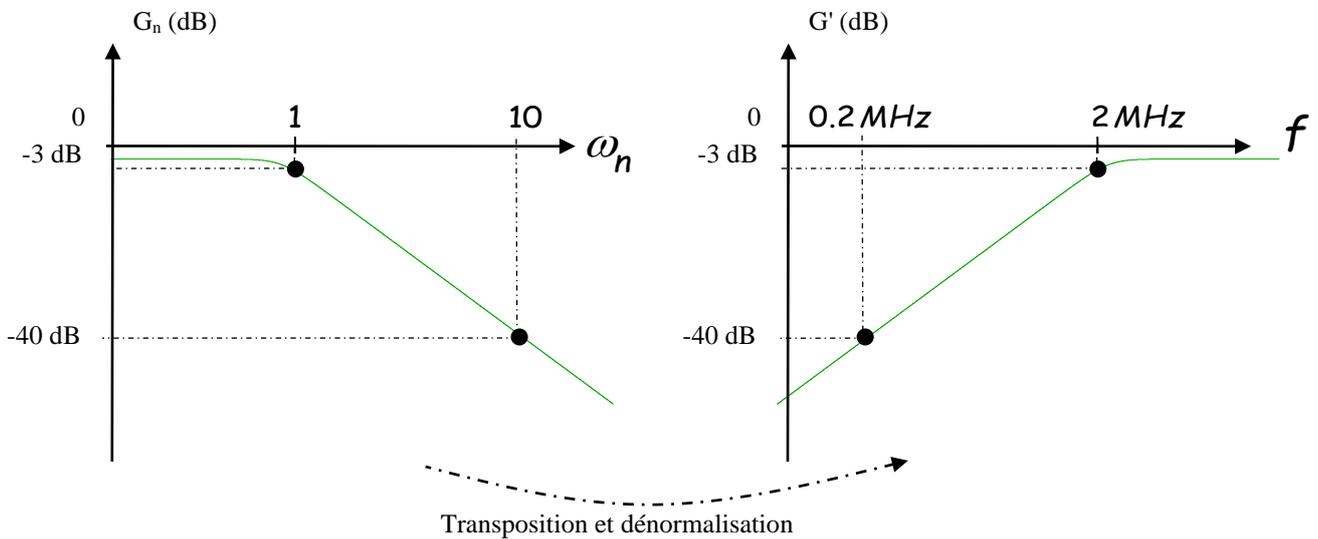
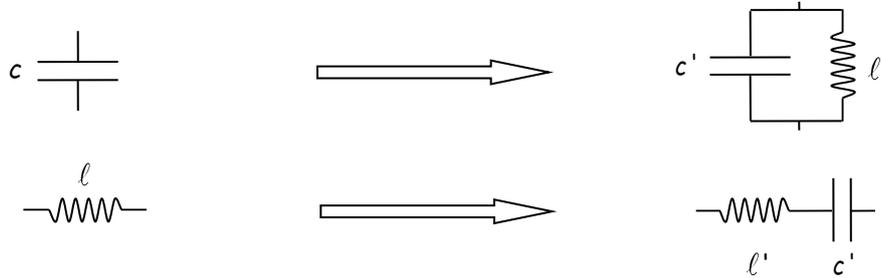


Figure 9 : prototype passe bas retenu pour ses propriétés (à gauche) et filtre obtenu après transposition et dénormalisation à la fréquence désirée (à droite)

b. Transposition Passe bas -> Passe bande

α. Principe

On doit remplacer les éléments passe bas du prototype de départ par des éléments passe bande :



β. Transposition de la fonction de transfert

La transformation qui permet de passer d'un filtre passe bas à un filtre passe bande est la suivante :

$$p_n \rightarrow \frac{1}{B} \left( p_n + \frac{1}{p_n} \right) \text{ où } B \text{ est la bande passante relative } B = \frac{f'_1 - f_1}{f_0} \quad (I.6)$$

Par exemple, la fonction de transfert passe bas  $H(p_n) = \frac{1}{1+p_n}$  devient  $H'(p_n) = \frac{1}{1+\frac{1}{B} \left[ p_n + \frac{1}{p_n} \right]}$  ou encore

$H'(p_n) = \frac{B p_n}{p_n^2 + B p_n + 1}$  qui est bien un filtre passe bande.

*Remarque :* On peut transposer directement la fonction de transfert passe bas non normalisée.

On remplace pour cela  $p_n$  par  $\frac{1}{B} \left( p_n + \frac{1}{p_n} \right)$ . Comme  $p = \omega_p p_n$ , on doit remplacer  $p$  par  $\frac{\omega_p}{B} \left( p_n + \frac{1}{p_n} \right)$  où  $p_n$  est la variable de Laplace normalisée du Passe Bande ( $p_n = p/\omega_0$ )

La transformation devient donc 
$$p \rightarrow \frac{\omega_p}{B} \left( \frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right) = \frac{\omega_p}{B \omega_0} \left( p + \frac{\omega_0^2}{p} \right) \quad (I.7)$$

Mais en pratique, on n'utilise pas cette transposition puisqu'on part des prototypes normalisés passe bas qu'il faut transposer puis dénormaliser pour synthétiser un filtre passe bande.

χ. Transposition des composants normalisés

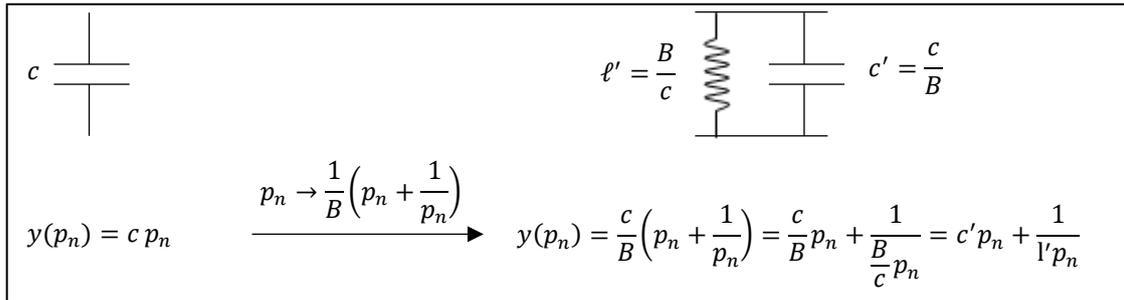
Comment sont transformés les composants passifs par la transposition proposées en (I.5) ?

• Résistances

La transformation (I.5) ne change rien aux résistances puisque l'impédance ne dépend pas de la fréquence.

• Condensateurs

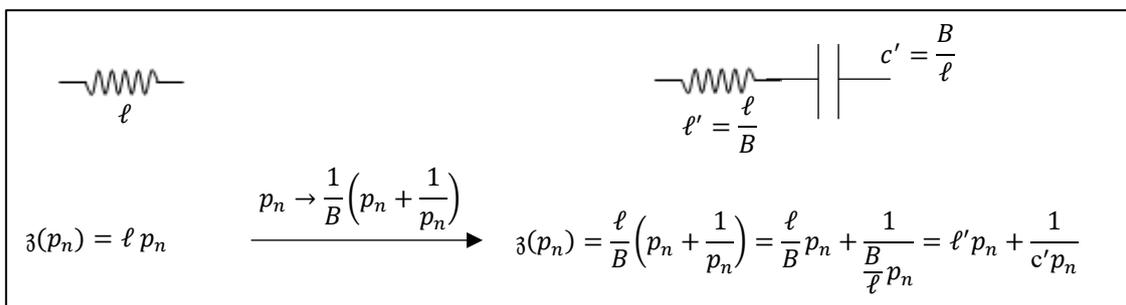
Par la transformation indiquée, l'impédance réduite d'un condensateur  $y(p_n) = c p_n$  devient  $y'(p_n) = c' p_n + \frac{1}{l' p_n}$ . En effet,



Un condensateur de capacité  $c$  se transforme donc en un condensateur  $c' = \frac{c}{B}$  en parallèle avec une bobine d'inductance  $\ell' = \frac{B}{c}$ .

•Bobines

Par la transformation indiquée, l'impédance réduite d'une bobine  $z(p_n) = \ell p_n$  devient  $z'(p_n) = \ell' p_n + \frac{1}{c' p_n}$



Une bobine d'inductance  $\ell$  se transforme donc en une bobine d'inductance  $\ell' = \frac{\ell}{B}$  en série avec un condensateur de capacité  $c' = \frac{B}{\ell}$ .

δ. Transposition des gabarits et des réponses fréquentielles

Pour synthétiser un filtre passe bande, il faut d'abord choisir le prototype passe bas qui convient bien à l'application, puis déterminer l'ordre du filtre nécessaire qui respectera le cahier des charges.

Pour déterminer l'ordre du filtre, il faut transformer le gabarit passe bande respectant le cahier des charges en un gabarit passe bas à partir duquel on pourra réfléchir à l'ordre.

Mais comment passer du gabarit du filtre passe bande au gabarit passe bas ? Pour répondre à cette question, il faut imposer que les valeurs de gain du filtre passe bande aux fréquences importantes respectivement ( $f_1$  et  $f'_1$ ) et ( $f_2$  et  $f'_2$ ) soient identiques aux valeurs de gain du filtre passe bas aux fréquences respectivement  $f_p$  et  $f_a$ , comme figuré sur la figure suivante.

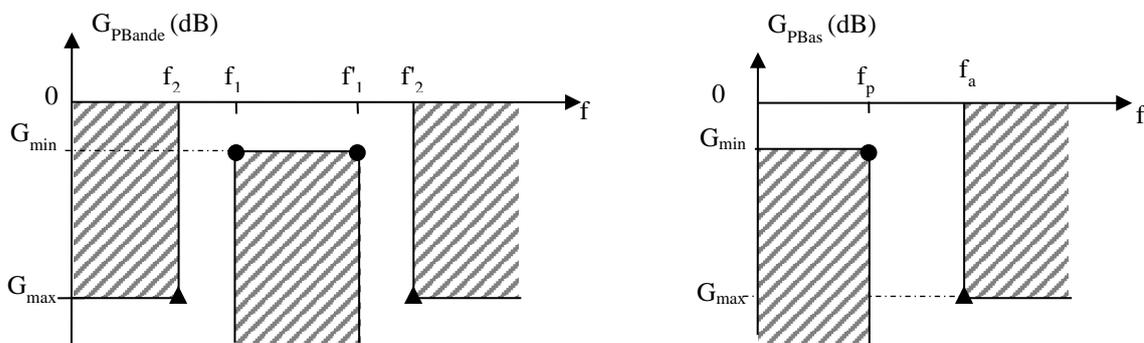


Figure 10 : Passage du gabarit passe bande au gabarit passe bas

• On cherche donc  $\omega_1$  et  $\omega'_1$  telle que  $|H_{PBande}(\omega_1)| = |H_{PBas}(\omega_p)|$  et  $|H_{PBande}(\omega'_1)| = |H_{PBas}(\omega_p)|$

$$\text{Or } H_{PBande}(p) = H_{PBas}\left(p \rightarrow \frac{\omega_p}{B\omega_0}\left(p + \frac{\omega_0^2}{p}\right)\right)$$

$$\text{On cherche donc } p_1 \text{ (et } p'_1) \text{ tels que } H_{PBas}\left[\left(\frac{\omega_p}{B\omega_0}\right)\left(p_1 + \frac{\omega_0^2}{p_1}\right)\right] = H_{PBas}[\omega_p]$$

On peut choisir artificiellement la valeur de  $\omega_p$  puisque le but final sera de déterminer le gabarit passe bas normalisé. On choisit donc pour simplifier  $\omega_p = \omega'_1 - \omega_1$ . L'équation ci-dessus devient donc :

$$H_{PBas}\left[p_1 + \frac{\omega_0^2}{p_1}\right] = H_{PBas}[p_p]$$

$$\text{Et en réponse fréquentielle, } |H_{PBas}(j\omega_1 + \omega_0^2/j\omega_1)| = |H_{PBas}(j\omega_p)|$$

Donc  $\omega_1$  et  $\omega'_1$  sont solutions de l'équation  $j\omega + \omega_0^2/j\omega = \pm j\omega_p$  (le  $\pm$  venant du fait que le module de la réponse fréquentielle est pair.)

$$\text{En arrangeant la relation on trouve : } \omega^2 \pm \omega_p \omega - \omega_0^2 = 0 \text{ dont les solutions sont : } \frac{\pm \omega_p \pm \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\text{Les 2 solutions positives sont finalement : } \omega'_1 = \frac{\omega_p + \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_0^2}}{2} \text{ et } \omega_1 = \frac{-\omega_p + \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

Ce résultat est cohérent puisqu'on retrouve bien le choix :  $\omega_p = \omega'_1 - \omega_1$ .

On montre aussi que  $\omega_1 \omega'_1 = \omega_0^2$ .

Ce dernier résultat est très important car il permet de calculer la fréquence centrale du filtre passe bande désiré, qui est aussi la fréquence de normalisation.

• De la même manière, on veut donc que  $|H_{PBande}(\omega_2)| = |H_{PBande}(\omega'_2)| = |H_{PBas}(\omega_a)|$

$$\text{Le même calcul donne les 2 solutions positives : } \omega'_2 = \frac{\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 + 4\omega_0^2}}{2} \text{ et } \omega_2 = \frac{-\omega_a + \sqrt{\omega_a^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

Cela conduit à ce que les pulsations de bord de bande coupée des filtres passe-bas et passe-bande soient reliées par  $\omega_a = \omega'_2 - \omega_2$ ,

De plus les 2 pulsations de bord de bande coupée du passe bande ne peuvent être quelconque car on trouve que  $\omega_2 \omega'_2 = \omega_0^2$ ,  $\omega_0$  devant être ainsi autant le centre géométrique de  $\omega_2$  et  $\omega'_2$  que de  $\omega_1$  et  $\omega'_1$ .

 **Pour résumer**, on fabrique le filtre passe bas normalisé comme montré sur la Figure 11. Mais avant de transposer le gabarit du filtre passe bande, il faut s'assurer qu'il est symétrique, c'est à dire que la fréquence "centrale"  $f_0 = \sqrt{f_1 f'_1}$  (centre géométrique de  $f_1$  et  $f'_1$ ) est aussi centre géométrique de  $f_2$  et  $f'_2$ ,  $f_0 = \sqrt{f_2 f'_2}$ . Si ce n'est pas le cas, il faut d'abord symétriser le gabarit du filtre passe bande tout en respectant le cahier des charges.

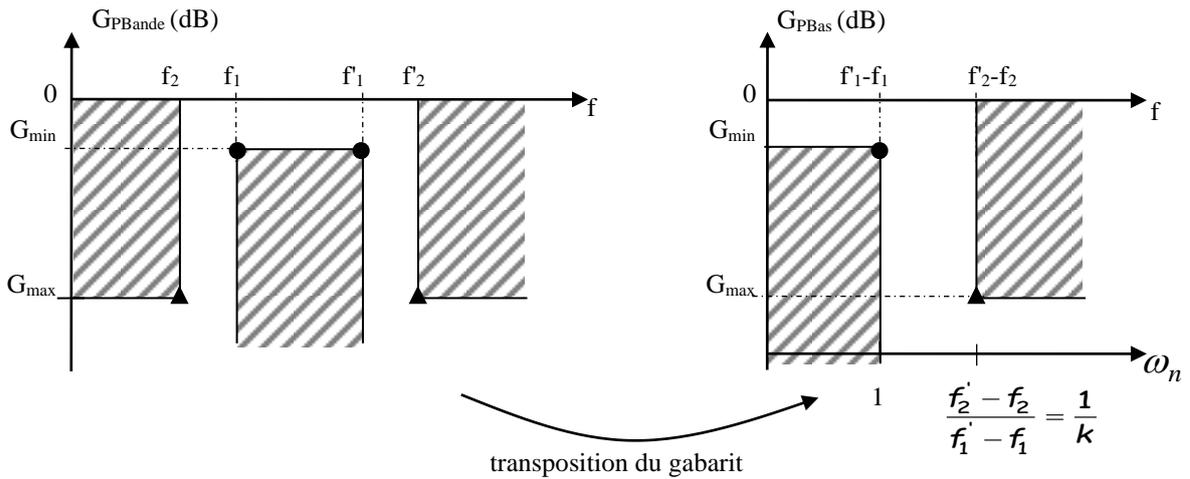


Figure 11 : Transposition du gabarit d'un filtre passe bande vers le gabarit normalisé du filtre passe bas

En ce qui concerne la réponse fréquentielle, le calcul de la réponse fréquentielle se fait à partir de la réponse du prototype passe bas par transposition comme figurée dans la Figure 12.

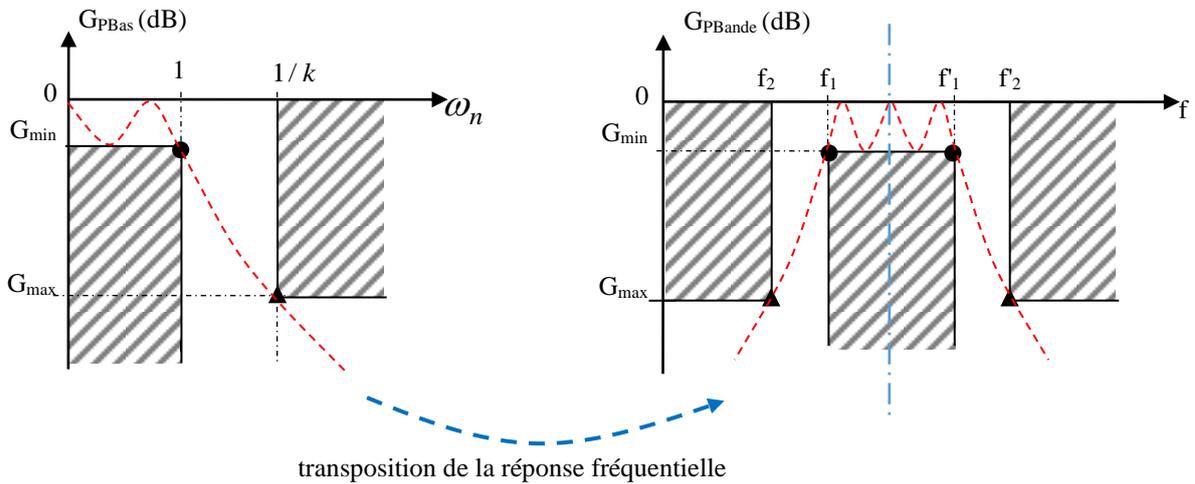
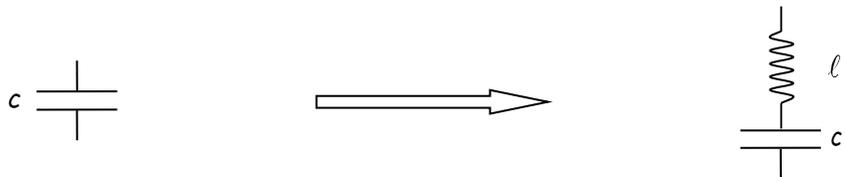


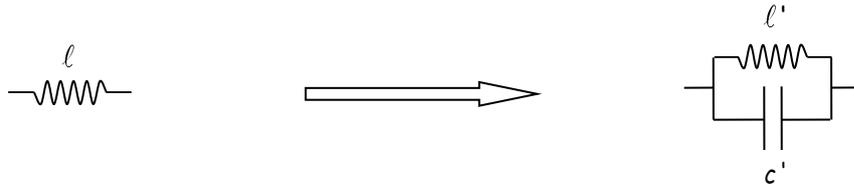
Figure 12 : Transposition de la réponse fréquentielle du prototype passe bas normalisée (à gauche) en la réponse de type passe bande (à droite)

c. Transposition Passe bas -> Coupe bande

α. Principe

On doit remplacer les éléments passe bas du prototype de départ par des éléments coupe bande :





**β. Transposition de la fonction de transfert**

La transformation qui permet de passer d'un filtre passe bas à un filtre coupe bande est la suivante :

$$p_n \rightarrow \frac{B}{p_n + \frac{1}{p_n}} \text{ où } B \text{ est la bande passante relative } B = \frac{f'_2 - f_2}{f_0} \quad (\text{I.8})$$

*Remarque : On peut transposer directement la fonction de transfert passe bas non normalisée en faisant la transposition  $p \rightarrow (B \omega_p \omega_0) / (p + \omega_0^2/p)$  où  $\omega_p$  est la pulsation de référence du filtre passe bas de départ et  $\omega_0$  la pulsation de référence du filtre transposé coupe bande. Mais en pratique, on n'utilise pas cette transposition puisqu'on dispose des prototypes normalisés passe bas qu'il faut transposer puis dénormaliser pour synthétiser un filtre coupe bande.*

**χ. Transposition des composants normalisés**

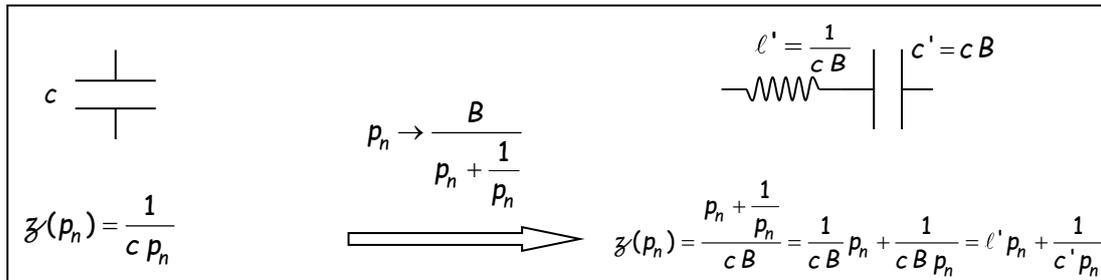
Comment sont transformés les composants passifs par la transposition proposées en (I.8) ?

• **Résistances**

La transformation (I.8) ne change rien aux résistances puisque l'impédance ne dépend pas de la fréquence.

• **Condensateurs**

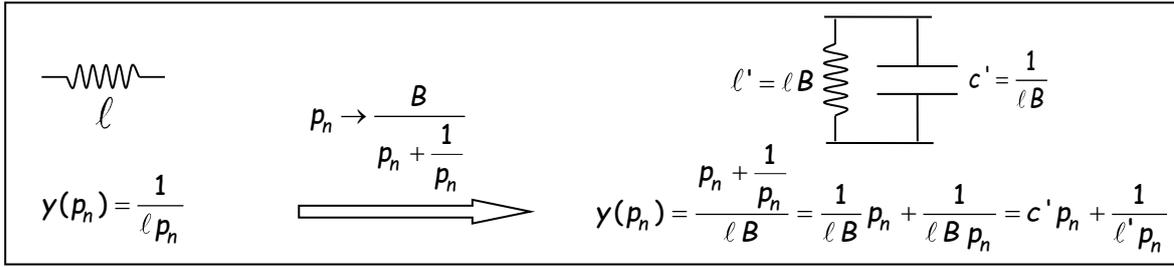
Par la transformation indiquée, l'impédance réduite d'un condensateur  $z(p_n) = \frac{1}{c p_n}$  devient  $z'(p_n) = l' p_n + \frac{1}{c' p_n}$ . En effet,



Un condensateur de capacité  $c$  se transforme donc en un condensateur  $c' = cB$  en série avec une bobine d'inductance  $l' = \frac{1}{cB}$ .

• **Bobines**

Par la transformation indiquée, l'impédance réduite d'une bobine  $y(p_n) = \frac{1}{l p_n}$  devient  $y'(p_n) = c' p_n + \frac{1}{l' p_n}$



Une bobine d'inductance  $\ell$  se transforme donc en une bobine d'inductance  $\ell' = \ell B$  en parallèle avec un condensateur de capacité  $c' = \frac{1}{\ell B}$

$\delta$ . Transposition des gabarits et des réponses fréquentielles

Pour synthétiser un filtre coupe bande, il faut d'abord choisir le prototype passe bas qui convient bien à l'application, puis déterminer l'ordre du filtre nécessaire qui respectera le cahier des charges.

Pour déterminer l'ordre du filtre, il faut transformer le gabarit coupe bande respectant le cahier des charges en un gabarit passe bas à partir duquel on pourra réfléchir à l'ordre.

Mais comment passer du gabarit du filtre coupe bande au gabarit passe bas ? Pour répondre à cette question, il faut imposer que les valeurs de gain du filtre passe bande aux fréquences importantes respectivement ( $f_1$  et  $f_1'$ ) et ( $f_2$  et  $f_2'$ ) soient identiques aux valeurs de gain du filtre passe bas aux fréquences respectivement  $f_a$  et  $f_p$ , comme figuré sur la Figure 13.

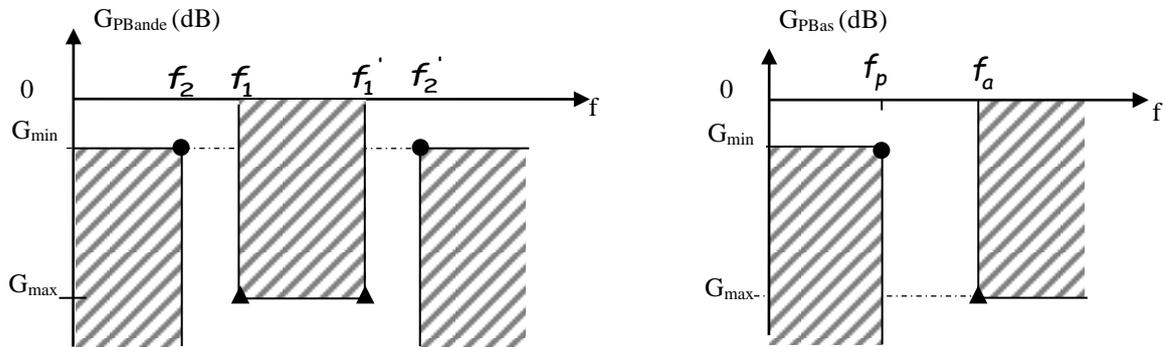


Figure 13 : Passage du gabarit coupe bande au gabarit passe bas

• On veut donc que  $|H_{CBande}(\omega_1)| = |H_{CBande}(\omega_1')| = |H_{PBas}(\omega_a)|$

$\omega_1$  et  $\omega_1'$  sont donc solutions de l'équation :

$$|H_{CBande}(\omega)| = |H_{PBas}(\omega_a)| \quad \text{or} \quad H_{CBande}(p) = H_{PBas}(p \rightarrow (B \omega_p \omega_0) / (p + \omega_0^2/p))$$

En réponse fréquentielle,  $p$  est remplacé par  $j\omega$ , ce qui donne :  $\omega / |H_{PBas}(\frac{B\omega_p\omega_0}{j\omega + \omega_0^2/j\omega})| = |H_{PBas}(j\omega_a)|$

et donc :  $\frac{B\omega_p\omega_0}{j\omega + \omega_0^2/j\omega} = \pm j\omega_a$  ( le  $\pm$  venant du fait que le module de la réponse fréquentielle est forcément pair.)

En arrangeant la relation on trouve :  $\omega_a \omega^2 \pm B\omega_0 \omega_p \omega - \omega_a \omega_0^2 = 0$  dont les solutions positives sont :

$$\omega_1 = \frac{-B\omega_0\omega_p + \sqrt{B^2\omega_0^2\omega_p^2 + 4\omega_a\omega_0^2}}{2\omega_a} \quad \text{et} \quad \omega_1' = \frac{B\omega_0\omega_p + \sqrt{B^2\omega_0^2\omega_p^2 + 4\omega_a\omega_0^2}}{2\omega_a}$$

On a alors  $\omega'_1 - \omega_1 = \frac{B\omega_0\omega_p}{\omega_a}$  et  $\omega_1 \omega'_1 = \omega_0^2$ .

Ce dernier résultat est très important car il permet de calculer la fréquence centrale du filtre coupe bande désiré, qui est aussi la fréquence de normalisation.

• De la même manière, on veut donc que  $|H_{CBande}(\omega_2)| = |H_{CBande}(\omega'_2)| = |H_{PBas}(\omega_p)|$

Le même calcul donne les 2 solutions positives :  $\omega_2 = \frac{-B\omega_0 + \sqrt{B^2\omega_0^2 + 4\omega_0^2}}{2}$  et  $\omega'_2 = \frac{B\omega_0 + \sqrt{B^2\omega_0^2 + 4\omega_0^2}}{2}$

Et on a alors  $\omega'_2 - \omega_2 = B\omega_0$  c'est-à-dire  $B = \frac{\omega'_2 - \omega_2}{\omega_0}$  et  $\omega_2 \omega'_2 = \omega_0^2$

On a vu que :  $\omega'_1 - \omega_1 = \frac{B\omega_0\omega_p}{\omega_a}$ . Si on choisit artificiellement  $\omega_p = \omega'_1 - \omega_1$  (puisque le but final sera de déterminer le gabarit passe bas normalisé), alors  $B\omega_0 = \omega_a$  et comme  $\omega'_2 - \omega_2 = B\omega_0$  alors  $\omega_a = \omega'_2 - \omega_2$ .

On a donc forcément  $\omega_0^2 = \omega_1 \omega'_1 = \omega_2 \omega'_2$

**✚ Pour résumer**, on fabrique le filtre passe bas normalisé comme montré sur la Figure 14 en utilisant les relations suivantes :  $\omega_p = \omega'_1 - \omega_1$  et  $\omega_a = \omega'_2 - \omega_2$

Mais avant de transposer le gabarit du filtre coupe bande, il faut s'assurer qu'il est symétrique, c'est à dire que la fréquence "centrale"  $f_0 = \sqrt{f_1 f'_1}$  (centre géométrique de  $f_1$  et  $f'_1$ ) est aussi centre géométrique de  $f_2$  et  $f'_2$ ,  $f_0 = \sqrt{f_2 f'_2}$ . Si ce n'est pas le cas, il faut d'abord symétriser le gabarit du filtre coupe bande tout en respectant le cahier des charges.

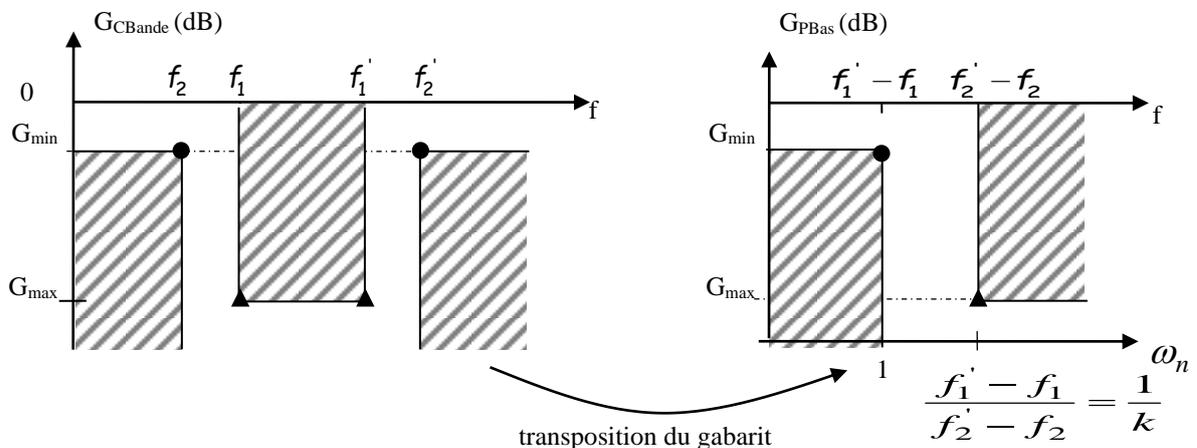


Figure 14 : Transposition du gabarit d'un filtre passe bande vers le gabarit normalisé du filtre passe bas

En ce qui concerne la réponse fréquentielle, le calcul de la réponse fréquentielle se fait à partir de la réponse du prototype passe bas par transposition comme figurée dans la Figure 15.

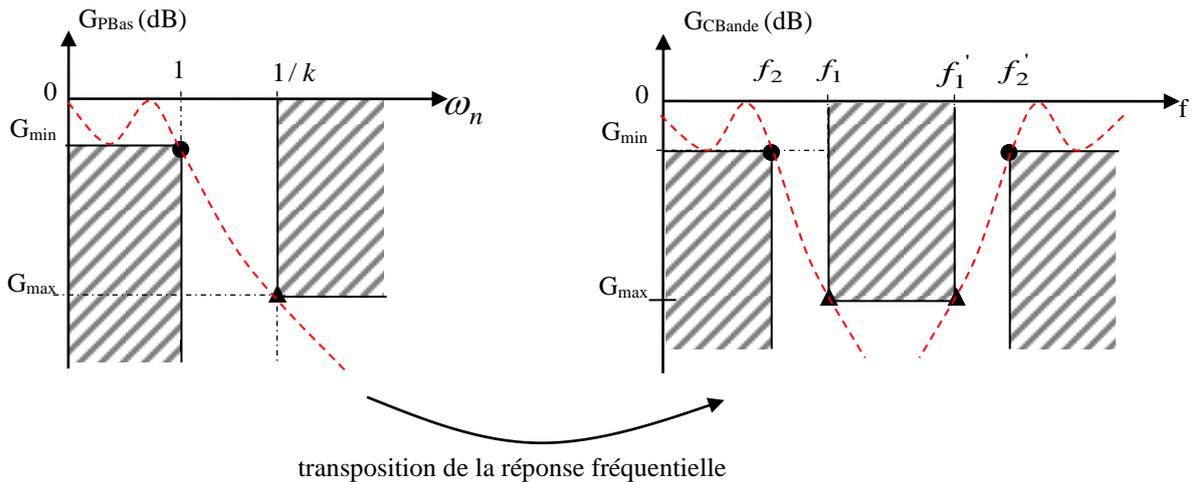


Figure 15 : Transposition de la réponse fréquentielle du prototype passe bas normalisée (à gauche) pour obtenir la réponse du filtre passe bande (à droite)

### 3. Calcul de la fonction de transfert H(p) à partir du gain |H(ω)|

Beaucoup de filtres sont utilisés pour la forme particulière de leur réponse fréquentielle. On verra au chapitre suivant que les filtres de Chébychev, par exemple, ont été fabriqués à partir des polynômes du même nom pour la forme particulière de leur gain. Mais comment calculer un filtre, c'est à dire, comment calculer la fonction de transfert d'un filtre dont on impose la forme du gain ? C'est la problématique que nous allons aborder dans ce chapitre.

Abordons tout d'abord certaines propriétés des systèmes linéaires.

#### A. Stabilité des systèmes linéaires

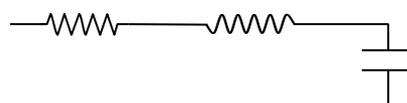
On désire calculer la fonction de transfert d'un filtre dont on a choisi le gain. Il n'y a pas qu'une seule solution à ce problème. Mais parmi celles-ci, on doit choisir une solution stable, c'est-à-dire une solution correspondant à un système qui n'oscillera pas ou dont la réponse ne divergera pas.

La réponse s(t) d'un système linéaire indépendant du temps à une excitation e(t) est solution de l'équation différentielle à coefficients constants :

$$b_n \frac{d^n s}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + b^0 s = a_m \frac{d^m e}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 e$$

avec  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  constantes.

Exemple : Soit un circuit RLC résonnant série



On a :  $e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int i dt$  et  $i(t) = C \frac{d^2 s}{dt^2}$

## Traitement des signaux analogiques

$$\text{D'où : } e(t) = RC \frac{ds}{dt} + LC \frac{d^2s}{dt^2} + s(t)$$

Régime Temporel :

La résolution de cette équation différentielle dépend du régime temporel. On peut considérer que l'on est en régime permanent ou en régime transitoire.

1. En régime permanent :

- L'entrée  $e(t)$  est soit constante (régime continu), soit périodique, sinusoïdale par exemple (régime permanent alternatif).

2. En régime transitoire :

- L'entrée  $e(t)$  est nulle en dehors d'un intervalle de temps fini. On peut toujours placer l'origine des temps ( $t = 0$ ) au début du signal d'entrée. Dans ce cas :

$$e(t) = 0 \text{ si } t < 0$$

$$e(t) \neq 0 \text{ si } t \geq 0$$

La résolution de l'équation différentielle se fait en deux étapes :

- Recherche des solutions générales de l'équation sans second membre. Cela correspond à annuler l'entrée  $e(t)$  et à étudier les variations de la sortie  $s(t)$ , alors qu'à  $t = 0$ , le système est dans un état quelconque. C'est le régime libre.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Cela correspond à étudier le régime forcé (transitoire suivi ou non d'un régime permanent).

L'étude du régime libre nous renseigne sur la stabilité du système. En effet, le système est stable si, quand l'entrée est nulle, la réponse du système  $s(t)$  tend vers 0.

Stabilité du système

Afin d'étudier le régime libre, nous cherchons donc les solutions de l'équation différentielle sans second membre (c'est-à-dire quand l'entrée est nulle) :

$$b_n \frac{d^n s}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 s = 0$$

les fonctions de la forme  $e^{pt}$  sont solutions de cette équation différentielle. En effet,

$$\frac{d}{dt}(e^{pt}) = p e^{pt} ; \dots ; \frac{d^k}{dt^k}(e^{pt}) = p^k e^{pt} .$$

l'équation différentielle devient donc :

$$[b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0] e^{pt} = 0$$

or  $e^{pt} \neq 0 \forall p, t$ . On a donc

$$\underbrace{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0 = 0}_{\substack{\text{(eq 2)} \\ \text{équation} \\ \text{caractéristique}}}$$

appelée équation caractéristique. Cette équation possède  $n$  solutions (racines) notées :

$p_1, p_2, \dots, p_n$ . Ces racines peuvent être simples ou multiples, réelles ou complexes. [On retrouvera cette équation caractéristique dans un chapitre ultérieur. Il est égal au dénominateur de la fonction de transfert que l'on obtiendra grâce à la transformée de Laplace.]

On notera que les racines de l'éq (2) peuvent être :

- simples réelles:  $p_i = \alpha_i$
- simples complexes:  $p_i = \alpha_i + j\omega_i$
- doubles réelles :  $p_i = p_{i+1} = \dots = p_{i+k-1}$

On peut alors factoriser le polynôme caractéristique :

$$(P - p_1)(P - p_2) \dots (P - p_n) = 0$$

Il faut remarquer que les racines complexes sont par paire. Si  $p_i = \alpha_i + j\omega_i$  est solution de l'équation caractéristique, alors  $p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$  l'est aussi.

En effet  $(P - p_i)(P - p_i^*) = \underbrace{P^2 - 2\alpha_i P + |p_i|^2}_{\text{coefficients réels}}$

ne donne que des coefficients réels comme c'est le cas dans l'équation différentielle de tout système physique.

Etudier la stabilité revient à étudier l'évolution temporelle des solutions de l'équation (1).

Si l'équation caractéristique (2) admet une racine simple réelle

$p_i = \alpha_i$  alors la solution de l'équation diff (1)

s'écrit :  $\boxed{\lambda(t) = e^{\alpha_i t}}$

cette solution ne correspond à une réponse stable c'est à dire s'annulant à  $t \rightarrow \infty$  que si  $\alpha_i < 0$ .

Si l'équation caractéristique (2) admet les racines simples complexes:  $p_i = \alpha_i + j\omega_i$  et  $p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$  alors la solution de l'équation (1) s'écrit comme combinaison linéaire de  $e^{p_i t}$  et  $e^{p_i^* t}$  :

$$s(t) = a e^{(\alpha_i + j\omega_i)t} + b e^{(\alpha_i - j\omega_i)t} \quad (\text{II.14})$$

$$= (a+b) e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t) + j(a-b) e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t).$$

solutions en général complexes qui ne peuvent décrire un système réel. Le choix des constantes ( $a$  et  $b$ ) doit être tel que ces solutions restent réelles. On constate que :

$$e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t) \text{ et } e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t)$$

sont solutions de l'équation (1) et on montre que la solution générale de (1) est donc

$$\underline{s(t) = c e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t) + d e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t)},$$

où  $c, d \in \mathbb{R}$

- Cette solution ne correspond à une réponse stable que si, la aussi,  $\alpha_i < 0$

⊖ Si l'équation caractéristique (2) admet une racine double réelle :  $p_i = \alpha_i$

une seule solution apparaît :  $s(t) = e^{\alpha_i t}$ .

Il manque alors une solution !

Posons  $s(t) = x(t) e^{\alpha_i t}$ , et remplaçons  $s(t)$

dans l'équation différentielle (1) en nous limitant à une équation d'ordre 2 ( $n=2$ ) pour comprendre le principe du calcul.

équation différentielle d'ordre 2: (II.15)

$$b_2 s'' + b_1 s' + b_0 s = 0 \quad (3)$$

d'équation caractéristique :

$$b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = 0 \quad (4)$$

qui admet une racine double (discriminant  $\Delta=0$ )

$$p = \alpha = -\frac{b_1}{2b_2}$$

$e^{\alpha t}$  est solution, cherchons la deuxième solution

du type  $s(t) = x(t) e^{\alpha t}$

On a donc  $s'(t) = x' e^{\alpha t} + x \alpha e^{\alpha t}$

et  $s''(t) = x'' e^{\alpha t} + x' \alpha e^{\alpha t} + x' \alpha e^{\alpha t} + x \alpha^2 e^{\alpha t}$   
 $= e^{\alpha t} (x'' + 2x' \alpha + x \alpha^2)$

l'équation (3) devient donc :

$$e^{\alpha t} [ b_2 (x'' + 2x' \alpha + x \alpha^2) + b_1 (x' + x \alpha) + b_0 x ] = 0$$

c'est à dire :

$$\left. \begin{aligned} & b_2 x'' \\ & + x (b_2 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_0) \\ & + x' (b_2 2\alpha + b_1) \end{aligned} \right\} = 0$$

Or  $b_2 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_0 = 0$  puisque  $\alpha$  est solution de (4)

et  $2b_2 \alpha + b_1 = 2b_2 \left(-\frac{b_1}{2b_2}\right) + b_1 = 0$

il reste donc :  $b_2 x'' = 0$

qui a comme solution en intégrant 2 fois :

$$x = ct + d$$

la solution est donc de la forme :

$$s(t) = (ct+d)e^{\alpha t}$$

(II.16)

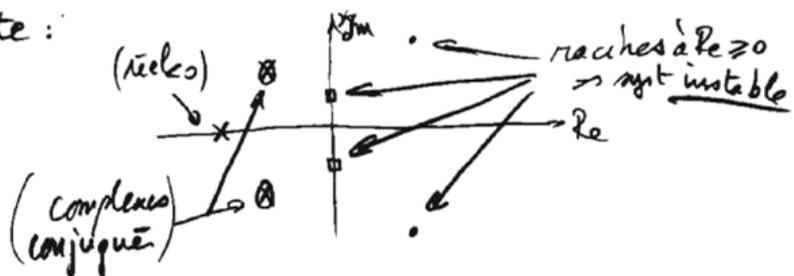
cette solution ne correspond à une réponse stable que si  $\alpha < 0$ .

### Conclusion sur la stabilité

Un système physique ne sera stable que si en l'absence d'excitation ( $e(t)=0$ ) la réponse du système  $s(t)$  s'annule qd  $t \rightarrow \infty$  et ceci quel que soit les conditions initiales.

En étudiant l'équation différentielle du système dans laquelle on a annulé l'entrée  $e(t)$  (réponse libre) on a montré que les solutions générales correspondent à une réponse qui tend à s'annuler si la partie réelle des racines de l'équation caractéristique sont toutes néglatives.

On peut représenter dans le plan complexe, les racines de l'éq caractéristique sur la figure suivante :



② le polynôme de l'équation caractéristique :

$$D(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0$$

a tous ses coefficients positifs et non nuls  
s'il correspond à un système stable.

Démonstration :

$D(p)$  peut être factorisé de la manière suivante :  $D(p) = (p-p_1)(p-p_2) \dots (p-p_n)$

où  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sont les racines de l'équation caractéristique (2).

Les racines sont soit réelles  $p_i = \alpha_i$ , soit complexes  $p_i = \alpha_i \pm j\omega_i$ , soit réelles doubles  $p_i = \alpha_i$  avec  $\alpha_i < 0$  pour un système stable.

- chaque  $(p-p_i)$  avec  $p_i$  réel  $< 0$  donne des coefficients réels positifs :  $[p + \underbrace{(\alpha_i)}_{>0}] \times [p + \underbrace{(-\alpha_i)}_{>0}] \dots$

- chaque racine complexe  $p_i = \alpha_i \pm j\omega_i$  donne

$$\begin{aligned} (p-p_i)(p-p_i^*) &= p^2 + p(-p_i-p_i^*) + |p_i|^2 \\ &= \underbrace{-p^2}_{>0} + p \underbrace{(-2\alpha_i)}_{>0} + \underbrace{|p_i|^2}_{>0} \quad \text{dont tous les coeff sont réels } > 0. \end{aligned}$$

c q/d.

On appelle un tel polynôme, un polynôme de Hurwitz,

- tous ses coefficients sont positifs et nuls,
- toutes ses racines sont à partie réelle  $< 0$ .

B. Quelques propriétés de la réponse fréquentielle



le système est caractérisé par l'équation différentielle suivante :

$$b_n \frac{d^n s}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 s = a_m \frac{d^m e}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 e$$

où  $b_i$  et  $a_i \in \mathbb{R}^+$  et sont constants.

la réponse fréquentielle  $H(j\omega)$  s'écrit :

$$H(\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{a_m (j\omega)^m + \dots + a_0}{b_n (j\omega)^n + \dots + b_0} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \text{1}^\circ / \text{a) } D(j\omega) &= b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_n(j\omega)^n \\ &= b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 + \dots + j\omega [b_1 - b_3 \omega^2 + b_5 \omega^4 + \dots] \\ &= \underbrace{D_1(\omega^2)}_{\text{paire en } \omega} + j\omega \underbrace{D_2(\omega^2)}_{\substack{\text{paire en } \omega \\ \text{impaire en } \omega}} \end{aligned}$$

et  $D_1$  et  $D_2$  sont des fonctions réelles

de même  $N(j\omega) = N_1(\omega^2) + j\omega N_2(\omega^2)$

$$b) \quad H(j\omega) = \frac{N_1 - j\omega N_2}{D_1 - j\omega D_2} = \frac{N^*}{D^*} = H^*(j\omega) \quad (VI.2)$$

$$c) \quad |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{N_1^2 + \omega^2 N_2^2}{D_1^2 + \omega^2 D_2^2}}$$

donc  $|H(j\omega)|$  est une fonction paire de  $\omega$ .

et  $|H(j\omega)|$  est une fonction de  $\omega^2$  uniquement

### 2<sup>o</sup>/ Stabilité du système

On a vu que pour que le système soit stable, il faut que tous les pôles de la fonction de transfert ( $p_i$ ) soient à partie réelle négative.

### 3<sup>o</sup>/ Systèmes à déphasage minimal

On montre que pour que le système introduise un déphasage minimal, il faut que les zéros de la fonction de transfert soient à partie réelle négative

De plus, on montre de la même manière que pour les pôles, qui  $z_k$  est un zéro alors  $z_k^*$  l'est aussi.

4.º/ Póles et zéros de  $|H(j\omega)|^2$

(VI.3)

On suppose que le système est stable et à déphasage minimal.

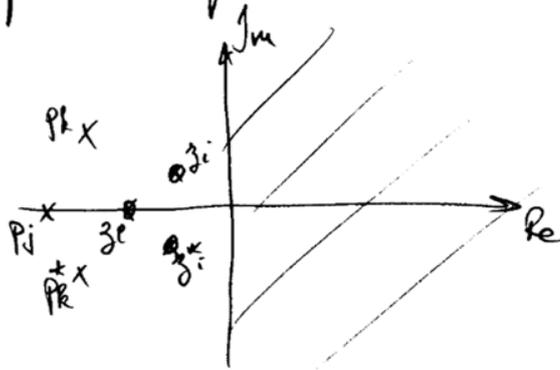
Soient  $p_1, p_2, \dots, p_n$  l'ensemble des pôles de  $H(p)$

et  $z_1, z_2, \dots, z_m$  l'ensemble des zéros de  $H(p)$

⊗ alors on peut écrire  $H(j\omega)$  comme :

$$H(j\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega} = K \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}$$

et les pôles et les zéros sont localisés à gauche dans le plan complexe :

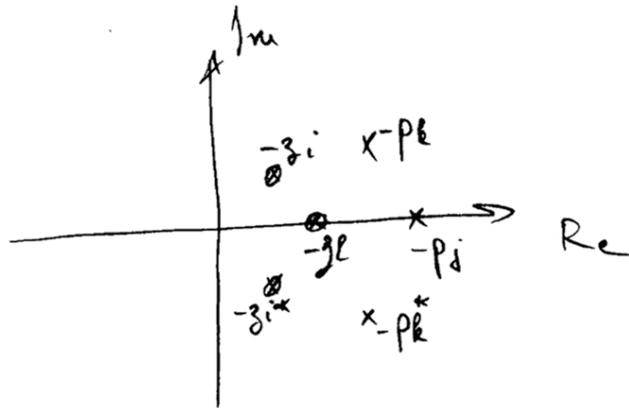


⊗ De plus

$$H^*(j\omega) = H(-j\omega) = K(-1)^{m+n} \frac{(j\omega + z_1) \dots (j\omega + z_m)}{(j\omega + p_1) \dots (j\omega + p_n)}$$

donc les pôles et zéros de  $H^*(j\omega)$  sont les opposés de ceux de  $H(j\omega)$ ,  
ils sont donc répartis dans le plan complexe  
comme suit :

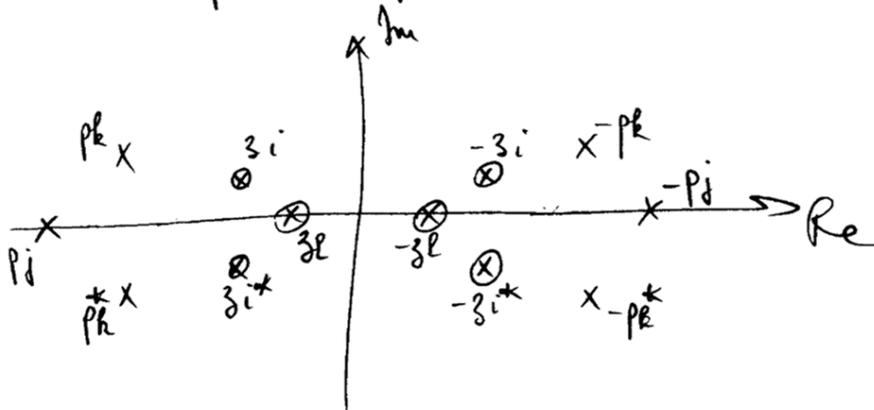
(VI.4)



⊛ le module de  $H(j\omega)$  s'écrit :

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) H^*(j\omega) = H(j\omega) H(-j\omega)$$

et possède tous les zéros et tous les pôles de  $H(j\omega)$  et de  $H(-j\omega)$ , qui se répartissent dans le plan complexe comme suit :



(On dit que les pôles et les zéros ont une symétrie quadrante)

C. Calcul de  $H(p)$  à partir du module de  $H(\omega)$

Supposons que l'on connaisse  $|H(\omega)|$  le module de  $H(\omega)$  :

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega) H^*(\omega) = H(j\omega) H(-j\omega) \quad \text{VI.5}$$

$$= H(p) H(-p) \Big|_{p=j\omega}$$

comme  $|H(\omega)|$  est fonction de  $\omega^2$  uniquement,  
 $|H(\omega)|^2$  l'est également.

donc  $H(p) H(-p) \Big|_{p=j\omega} = |H(\omega)|^2$

cad  $H(p) H(-p) = |H(\omega)|^2 \Big|_{\omega = \frac{p}{j}} = |H(\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -p^2}$

$\uparrow$   
recherché
 $\uparrow$   
connu

Pour déterminer  $H(p)$ , il faut donc, à partir de  $|H(\omega)|^2$  remplacer  $\omega^2$  par  $-p^2$ , et on obtient l'expression de  $H(p) \cdot H(-p)$ .

on recherche alors tous les zéros et les pôles de  $H(p)H(-p)$ , on élimine la moitié d'entre eux qui ont une partie réelle positive (ceux qui correspondent à  $H(-p)$ ), la moitié restante correspond à  $H(p)$ :

on calcule alors  $H(p)$  grâce à ses pôles et ses zéros.

Exemple

On choisit une fonction dont la forme convient pour  $|H(\omega)|^2$ .

par ex :  $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+2\omega^4}$

(ne pas oublier que  $|H(\omega)|^2$  est forcément fonction de  $\omega^2$ )

en remplaçant  $\omega^2$  par  $-p^2$  dans  $|H(\omega)|^2$  on

obtient :  $H(p)H(-p) = \frac{1}{1+2(-p^2)^2} = \frac{1}{1+2p^4}$

Recherche des pôles et des zéros de  $H(p)H(-p)$  :

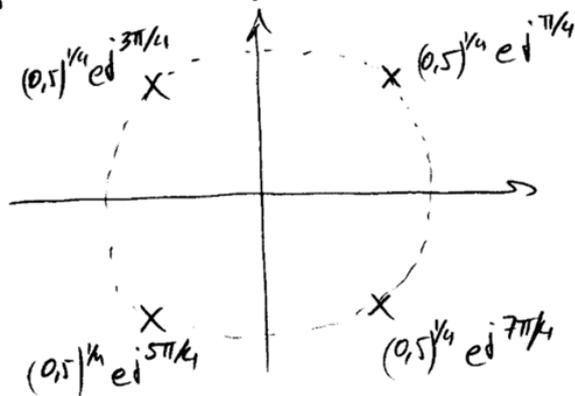
- il n'y a pas de zéros

- les pôles sont tels que  $1+2p^4 = 0$

cad  $p^4 = -0,5 = -0,5 e^{j2k\pi} = 0,5 e^{j(2k+1)\pi}$

cad  $p = (0,5)^{1/4} e^{j(2k+1)\pi/4}$

les pôles se répartissent comme suit :



on ne conserve que les pôles à partie réelle négative, soit :

$$p_1 = (0.5)^{1/4} e^{j3\pi/4}$$

(VI.7)

$$p_2 = (0.5)^{1/4} e^{j5\pi/4} = p_1^*$$

et on a

$$H(p) = \frac{K}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

cad

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + p(-p_1 - p_2) + p_1 p_2} = \frac{1}{p^2 + (2)^{1/4} p + \sqrt{0.5}}$$

$$= \frac{K \sqrt{2}}{\sqrt{2} p^2 + 2^{1/4} p + 1}$$

Or  $H(\omega)_{\text{Max}}$  doit être égal à 1 (voir expression de  $|H(\omega)|^2$ )

donc  $K = 1/\sqrt{2}$

d'où

$$H(p) = \frac{1}{\sqrt{2} p^2 + 2^{1/4} p + 1}$$

## 4. Filtres Prototypes

### A. Introduction

Selon l'application visée, on définit un cahier des charges. Celui-ci se présente comme une liste de fréquence avec les atténuations correspondantes recherchées. Le cahier des charges peut aussi préciser certaines propriétés sur le comportement en phase du système final. On traduit généralement ce cahier des charges en un gabarit qui donne après transposition et

normalisation un gabarit passe bas normalisé. Il reste alors à choisir un type de filtre dont on connaît à priori certaines propriétés. Ces filtres connus et catalogués sont appelés "Filtres Prototypes".

Nous allons maintenant étudier certains de ces filtres prototypes. Nous étudierons successivement les filtres de:

- Butterworth
- Chebychev
- Legendre
- Cauer
- Bessel
- Gauss

## B. Distorsion des signaux

## C. Filtres de Butterworth

### a. Définitions

Ces filtres sont caractérisés par une réponse la plus plate possible dans la bande passante. On les appelle ainsi "Maximally Flat" en anglais.

Ce sont des filtres polynomiaux de la forme :

$$|H_m(\omega)|^2 = \frac{1}{a_m \omega^{2m} + a_{m-1} \omega^{2(m-1)} + \dots + a_1 \omega^2 + 1} = \frac{1}{A^2(\omega^2)} \text{ où } m \text{ est l'ordre du filtre}$$

### b. Calcul de $H(\omega)$

Afin de rendre la réponse de ces filtres passe bas la plus plate possible dans la bande passante, on s'arrange pour que le maximum de dérivées de  $A^2$  soient nulles en  $\omega=0$ .

$$\frac{\partial(A^2)}{\partial(\omega^2)} \Big|_{\omega=0} = (m a_m \omega^{2(m-1)} + (m-1) a_{m-1} \omega^{2(m-2)} + \dots + 2a_2 \omega^2 + a_1) \Big|_{\omega=0} = 0 \quad \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2(A^2)}{\partial(\omega^2)^2} \Big|_{\omega=0} = (m(m-1) a_m \omega^{2(m-2)} + (m-1)(m-2) a_{m-1} \omega^{2(m-3)} + \dots + 4a_2) \Big|_{\omega=0} = 0 \quad \Rightarrow a_2 = 0$$

et ainsi de suite jusqu'à la dérivée  $(m-1)^{\text{ième}}$  :

$$\frac{\partial^{m-1}(A^2)}{\partial(\omega^2)^{m-1}} \Big|_{\omega=0} = (m(m-1)\dots(2) a_m \omega^2 + (m-1)(m-2)\dots 2a_{m-1}) \Big|_{\omega=0} = 0 \quad \Rightarrow a_{m-1} = 0$$

en résumé :  $a_1 = 0$  ;  $a_2 = 0$  ; ..... ;  $a_{m-1} = 0$

ce qui donne le gain des filtres de Butterworth d'ordre  $m$  :  $|H_m(\omega)|^2 = \frac{1}{a_m \omega^{2m+1}}$

Il faut ensuite choisir le gain minimum  $G_{min}$  dans la bande passante pour normaliser le filtre. Les filtres de Butterworth sont en général normalisés à  $G_{min} = -3dB$ .

On cherche donc la pulsation de référence  $\omega_0$  telle qu'à  $\omega = \omega_0$ ,  $|H_m|^2$  vaille  $\frac{1}{2}$  ce qui donne  $\omega_0^{2m} = \frac{1}{a_m}$

or la fréquence normalisée vaut  $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$  :

d'où  $|H_m(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega_n^{2m+1}}$  (Filtres P.Bas de Butterworth normalisé à -3dB d'ordre m )

c. *Calcul de la fonction de transfert d'un filtre de Butterworth*

Selon la méthode démontrée dans le chapitre précédent :

$$H(p_n)H(-p_n) = |H(\omega_n)|^2 \Big|_{\omega_n^2 = -p_n^2} = \frac{1}{(-p_n^2)^n + 1} = \frac{1}{(-1)^n p_n^{2n} + 1}$$

Il faut ensuite trouver les zéros (il n'y en a pas...) et les pôles de  $H(p_n)H(-p_n)$ . Les pôles de  $H(p_n)H(-p_n)$  sont solutions de l'équation suivante :  $(-1)^n p_n^{2n} + 1 = 0$

Puis on ne garde que les pôles à partie réelle négative pour obtenir une fonction de transfert stable.

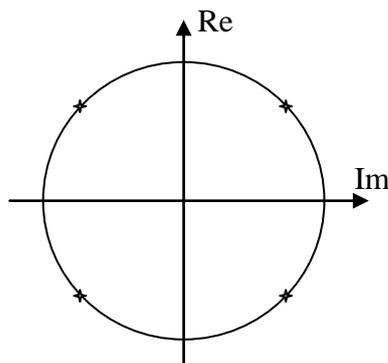
*Prenons l'exemple d'un filtre de Butterworth d'ordre 2 (m=2)*

$$H(p_n)H(-p_n) = |H(\omega_n)|^2 \Big|_{\omega_n^2 = -p_n^2} = \frac{1}{(-p_n^2)^m + 1} = \frac{1}{p_n^4 + 1}$$

calcul des pôles :  $p_n^4 + 1 = 0 \rightarrow p_n^4 = -1 = e^{j(\pi+2k\pi)}$

ce qui donne :  $p_n = e^{j(2k+1)\pi/4}$  ou encore  $p_n = \begin{cases} e^{j\pi/4} \\ e^{j3\pi/4} \\ e^{j5\pi/4} \\ e^{j7\pi/4} \end{cases}$

qui se répartisse dans le plan complexe comme suit :



On ne garde que les pôles à partie réelle négative pour obtenir une fonction de transfert  $H(p_n)$  d'un système stable (les 2 autres pôles sont associés à  $H(-p_n)$  )

soient :  $p_n = \begin{cases} e^{j3\pi/4} \\ e^{j5\pi/4} \end{cases}$  et on a :  $H(p_n) = \frac{1}{(p_n - e^{j3\pi/4})(p_n - e^{j5\pi/4})}$

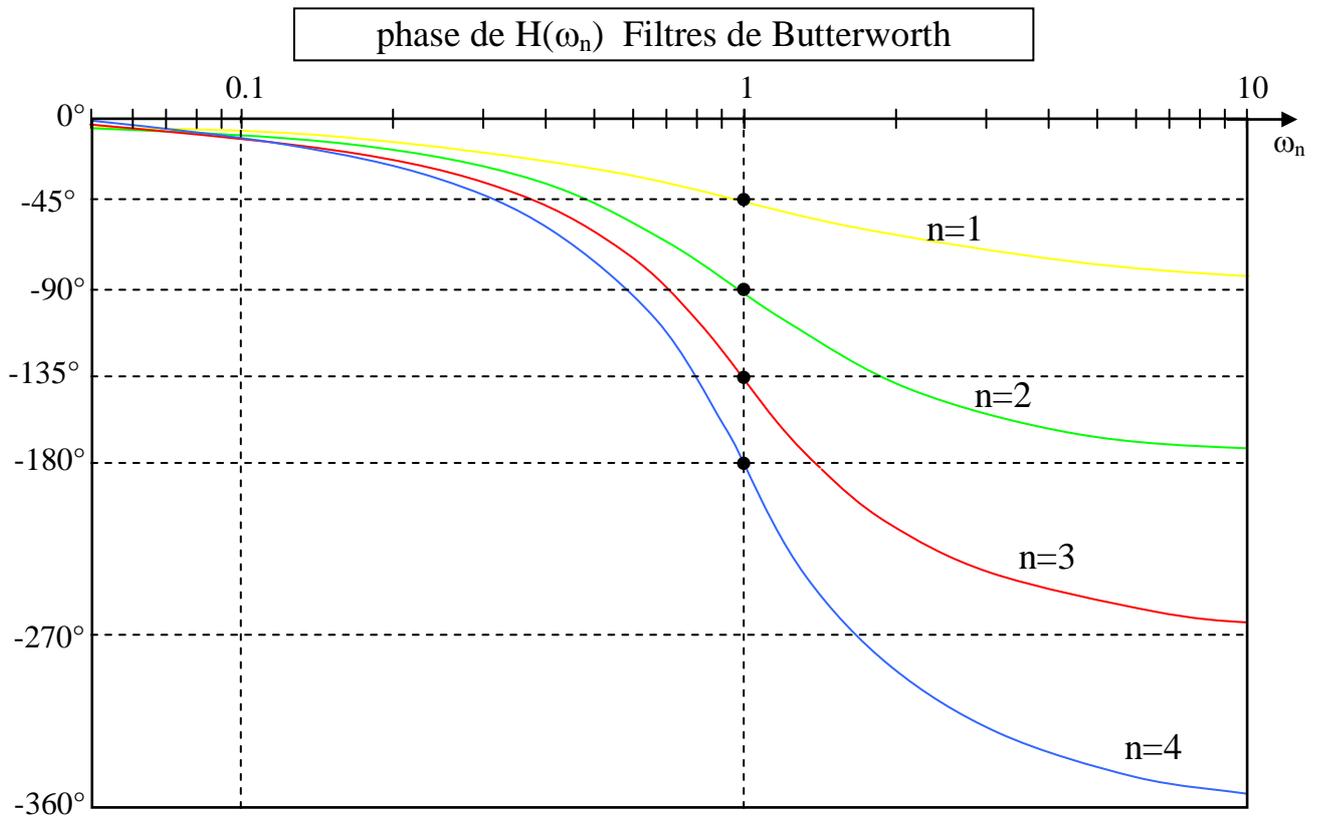
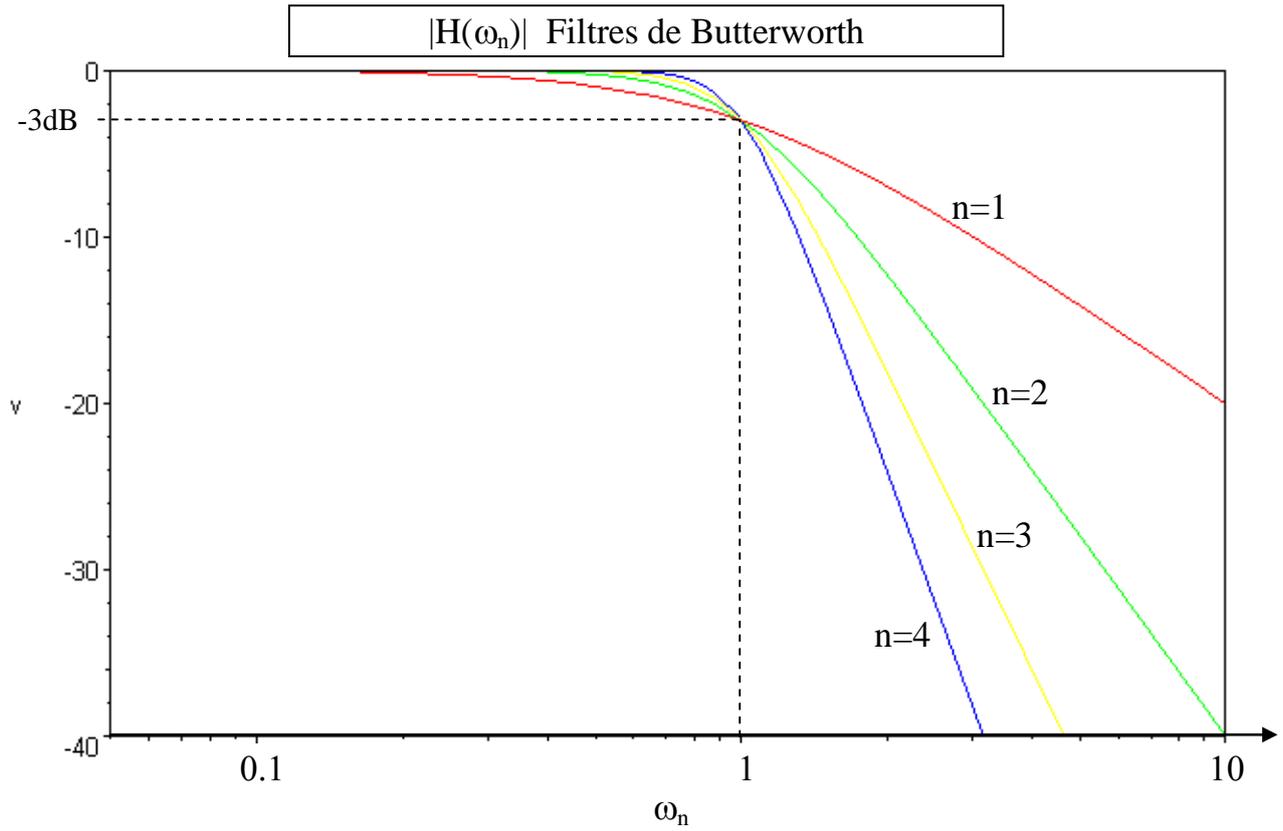
ce qui donne après calcul  $H(p_n) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}p_n + p_n^2}$  (Filtre de Butterworth du 2<sup>nd</sup> ordre normalisé à -3dB)

On obtient par la même méthode les fonctions de transfert des filtres de Butterworth listée dans le tableau suivant.

m	Filtres de Butterworth $1/H(p_n)$
1	$p_n+1$
2	$p_n^2+1,414p_n+1$
3	$(p_n+1)(p_n^2+p_n+1)$
4	$(p_n^2+0,7654p_n+1)(p_n^2+1,8478p_n+1)$
5	$(p_n+1)(p_n^2+0,6180p_n+1)(p_n^2+1,6180p_n+1)$
6	$(p_n^2+0,5176p_n+1)(p_n^2+1,414p_n+1)(p_n^2+1,9318p_n+1)$
7	$(p_n+1)(p_n^2+0,4450p_n+1)(p_n^2+1,247p_n+1)(p_n^2+1,8022p_n+1)$
8	$(p_n^2+0,3986p_n+1)(p_n^2+1,111p_n+1)(p_n^2+1,6630p_n+1)(p_n^2+1,9622p_n+1)$

d. *Propriétés des filtres de Butterworth*

Voici le diagramme de Bode des filtres de Butterworth d'ordre 1 à 4.



- La pulsation de coupure est en général définie à -3dB
- Le comportement asymptotique des filtres d'ordre m quand  $\omega$  tend vers l'infini est classiquement en  $-20m$  dB/décade ou encore  $-6m$  dB/octave

- Les filtres de Butterworth n'ondule pas dans la bande passante.
- La phase ne varie pas linéairement en fonction de  $\omega$  dans la bande passante mais cette non linéarité n'est pas trop importante par rapport à la plupart des autres prototypes (excepté Bessel). Les signaux passants ces filtres ne seront donc pas trop déformés par rapport aux filtres de Chebychev ou de Cauer.
- La coupure autour de la fréquence de référence ( $\omega_n=1$ ) n'est pas très raide. Les filtres de Butterworth coupent moins rapidement que d'autres filtres prototypes tels que les filtres de Chebychev ou de Cauer.

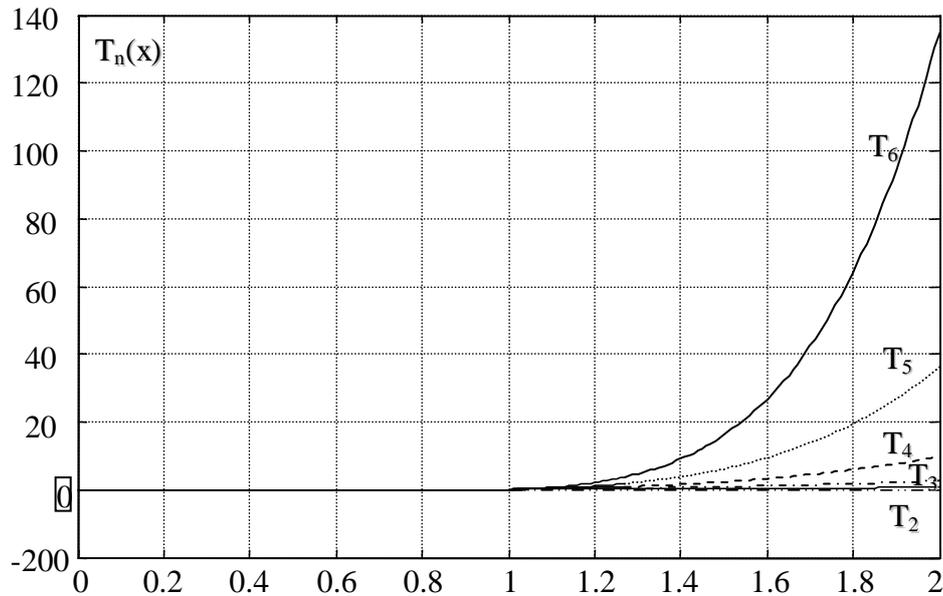
## D. Filtres de Chebychev

### a. Polynômes de Chebychev

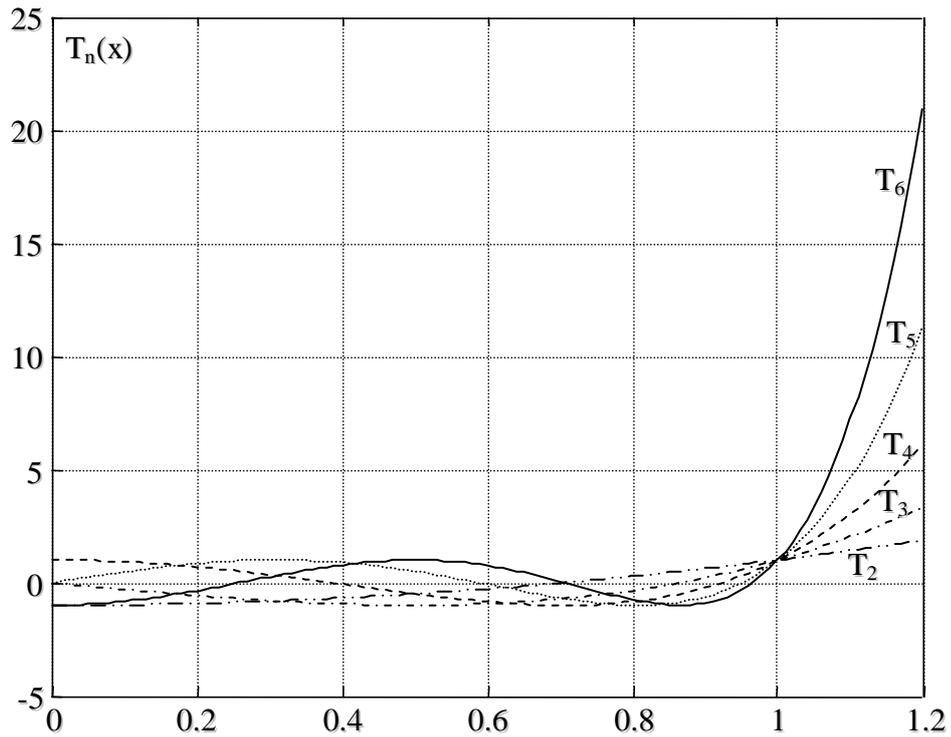
Ces filtres reposent sur les polynômes de Chebychev dont le comportement est intéressant. Ces polynômes sont définis ci-dessous par récurrence :

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \text{avec} \quad T_0(x)=1 \quad \text{et} \quad T_1(x)=x$$

Ci-dessous sont tracés les polynômes de Chebychev pour les ordres  $n=2$  à  $6$



Polynômes de Chebychev pour n=2 à 6

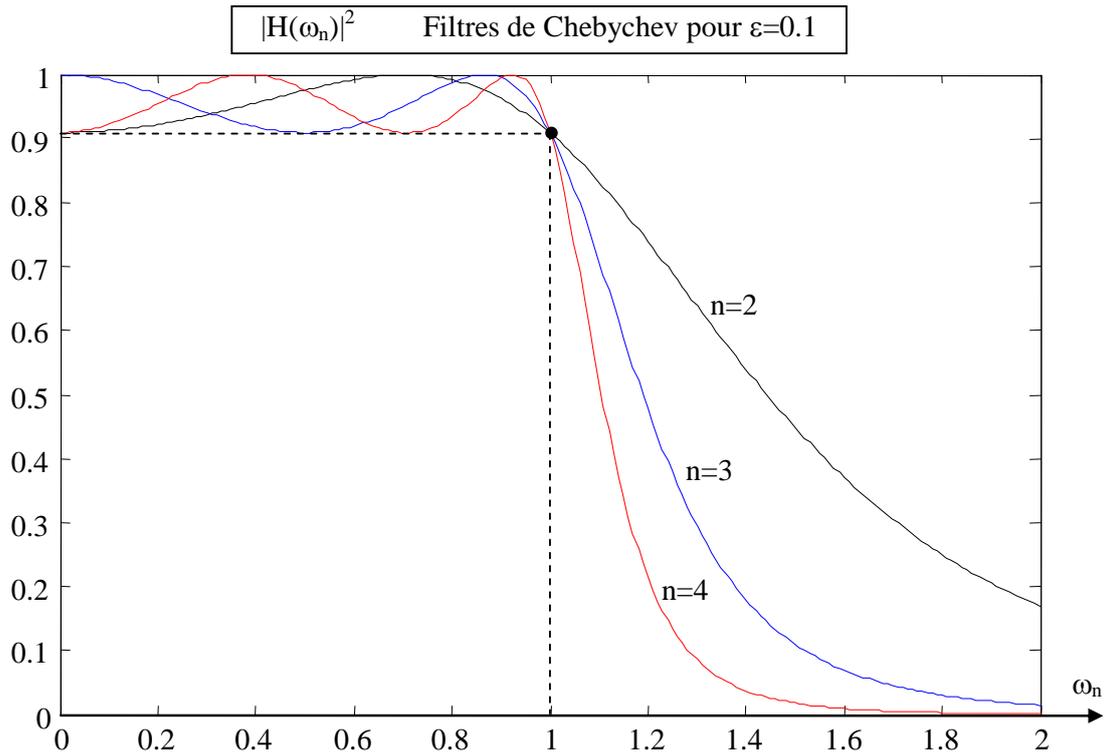


Polynômes de Chebychev pour n=2 à 6 ( détails )

b. Définition des Filtres de Chebychev

On définit l'atténuation de ces filtres de la manière suivante :  $A^2(\omega_n) = \frac{1}{|H(\omega_n)|^2} = 1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_n)$

La figure suivante montre l'allure de  $|H(\omega_n)|^2 = 1/A^2$  pour  $\varepsilon=0.1$  et  $n=2, 3$  et  $4$



c. Propriétés des filtres de Chebychev

- $|H(\omega_n)|^2$  oscille  $n$  fois entre 1 et  $1+\epsilon^2$  dans la bande passante ( $\omega_n=0\dots 1$ )
- On appelle ces filtres "equal ripple" (ondulation constante) à cause de la propriété précédente
- $|H(\omega_n=1)|^2$  vaut  $1/(1+\epsilon^2)$  donc le gain (en dB) dans la bande passante vaut  $10 \log_{10}(1/(1+\epsilon^2))$  par exemple :  
 $\epsilon=1 \rightarrow$  gain de -3 dB et donc une ondulation= 3 dB dans la bande passante  
 $\epsilon=0.5 \rightarrow$  gain de -1 dB et donc une ondulation= 1 dB dans la bande passante
- à  $\omega_n=1$ , l'atténuation ne vaut pas forcément -3dB comme pour les filtres de Butterworth. Cela dépend de l'ondulation choisie.

- Comportement asymptotique pour  $\omega_n$  grand,  $|H(\omega_n)|^2$  varie en  $\frac{1}{\omega_n^{2n}}$  ce qui donne en gain

$$G = 10 \log_{10} |H(\omega_n)|^2 \quad \text{varie en} \quad 10 \log_{10} \frac{1}{\omega_n^{2n}} = -10 \log_{10}(\omega_n^{2n})$$

cad en  $-20n \log_{10}(\omega_n)$  ce qui correspond à une atténuation en 20n dB/décade

- les filtres de Chebychev ont une coupure plus raide que les filtres de Butterworth mais ils ondulent dans la bande passante.
- Leur phase est moins linéaire que les filtres de Butterworth dans la bande passante, et donc que les signaux sont plus déformés avec ces filtres qu'avec les filtres de Butterworth.
- Dans les tableaux les coefficients  $g_n$  (valeurs normalisée des composants) on peut remarquer que lorsque l'ordre du filtre est pair, le dernier coefficient ( $g_{n+1}$ ) est différent de 1. Cela signifie qu'il n'est pas possible de réaliser un filtre de Chebychev symétrique ( $g_0=g_{n+1}=1$  cad  $R_{source}=R_{charge}=R_0$ ) pour les ordres pairs. Dans ce cas, le  $g_{n+1}$  représente alors la conductance réduite de la charge :

$Z_L=R_0/g_{n+1}$  qui est différente de  $R_0\dots$

E. Filtres de Legendre (Papoulis)

a. *Définition*

Les filtres de Legendre sont calculés de manière à ce que leur coupure soit la plus raide possible sans pour autant onduler dans la bande passante. Ils possèdent donc une dérivée toujours négative c'est à dire à une atténuation uniformément croissante. Ces filtres reposent sur les polynômes de Legendre de première espèce  $P_n(x)$ . On définit l'atténuation de ces filtres par :

$$A^2(\omega_n) = \frac{1}{|H(\omega_n)|^2} = 1 + \varepsilon^2 L_n(\omega_n^2)$$

où les  $L_n$  sont des polynômes calculés à partir de :

si l'ordre n est pair : 
$$L_n(x) = \int_{-1}^{2x-1} \left[ \sum_{m=0}^K a_m P_m(u) \right] du \quad \text{où } K=(n-1)/2$$

$$a_m = \frac{2m+1}{(m+1)\sqrt{2}}$$

si l'ordre n est impair : 
$$L_n(x) = \int_{-1}^{2x-1} \left[ (u+1) \sum_{m=0}^K a_m P_m(u) \right] du \quad \text{où } K=(n-2)/2$$

si K est pair 
$$a_{2n} = \frac{4n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{(les coefficients impairs sont nuls)}$$

si K est impair 
$$a_{2n+1} = \frac{4n+3}{\sqrt{(2n+2)(2n+3)}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_{2n} = 0 \quad \text{(les coefficients pairs sont nuls)}$$

et les polynômes de Legendre de première espèce  $P_m$  sont définis par :

$$P_0(u) = 1 ; P_1(u) = u ; P_m(u) = \frac{1}{m+1} [(2m+1)u P_{m-1}(u) - m P_{m-2}(u)]$$

On trouve finalement l'expression des fonctions  $L_n(x)$  :

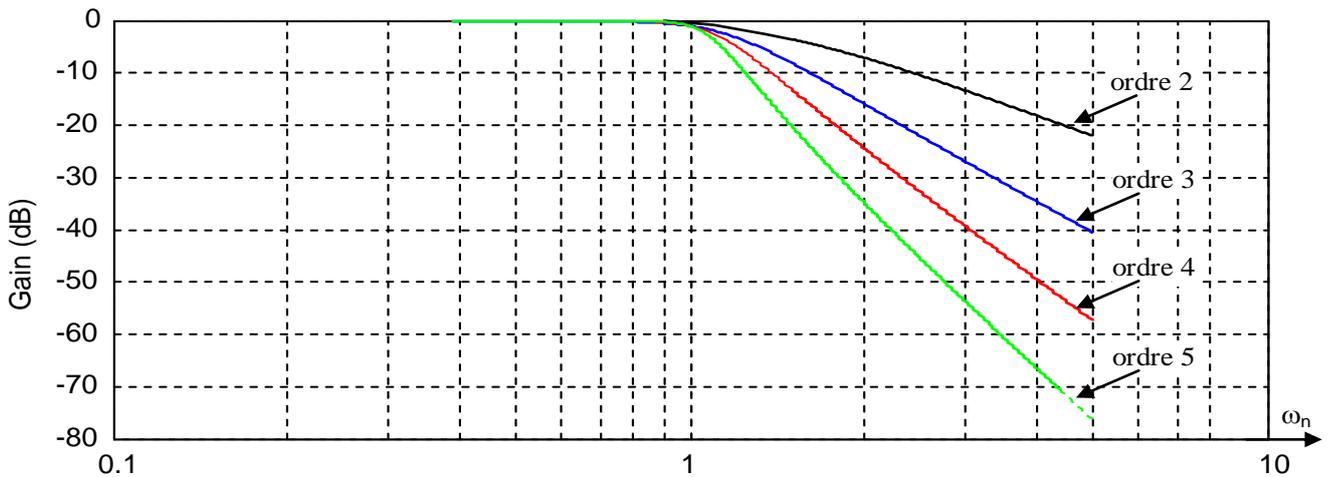
n	$L_n(x)$
1	x
2	$x^2$
3	$3x^3 - 3x^2 + x$

4	$6x^4 - 8x^3 + 3x^2$
5	$20x^5 - 40x^4 + 28x^3 - 8x^2 + x$
6	$50x^6 - 120x^5 + 105x^4 - 40x^3 + 6x^2$

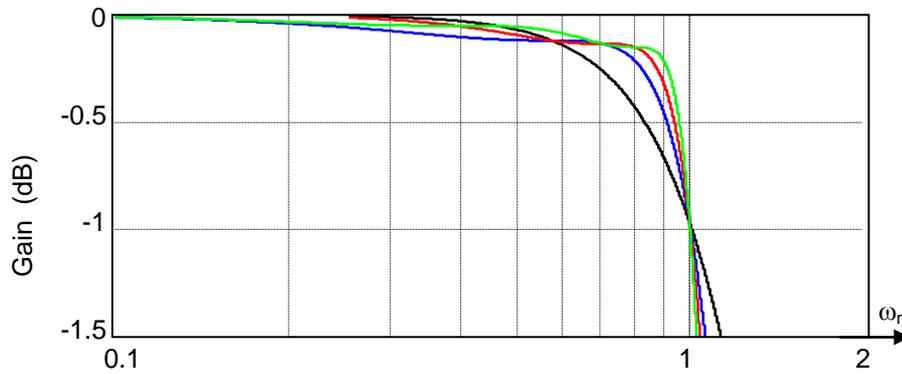
*b. Réponse fréquentielle*

Les figures suivantes montrent le gain en dB des filtres de Legendre d'ordres 2 à 5

(normalisé à -1 dB ( $\epsilon=0.5$ ))



Gain des filtres de Legendre pour n=2 à 5



Gain des filtres de Legendre pour n=2 à 5 (détails)

*c. Propriétés des filtres de Legendre*

Les filtres de Legendre sont dits optimaux car leurs propriétés se situent entre les filtres de Butterworth et ceux de Chebychev. Ils sont plus raides que les Butterworth mais moins que les Chebychev, et leur phase est moins linéaire dans la bande passante que les Butterworth mais plus que les Chebychev.

On remarque que  $L_n(x=1) = 1$  quel que soit n, et donc que l'atténuation des filtres de Legendre à la fréquence de référence ( $\omega_n=1$ ) est fixée par la valeur de  $\epsilon$ .

le carré de l'atténuation vaut  $A^2(\omega_n=1) = 1 + \varepsilon^2$  et donc :

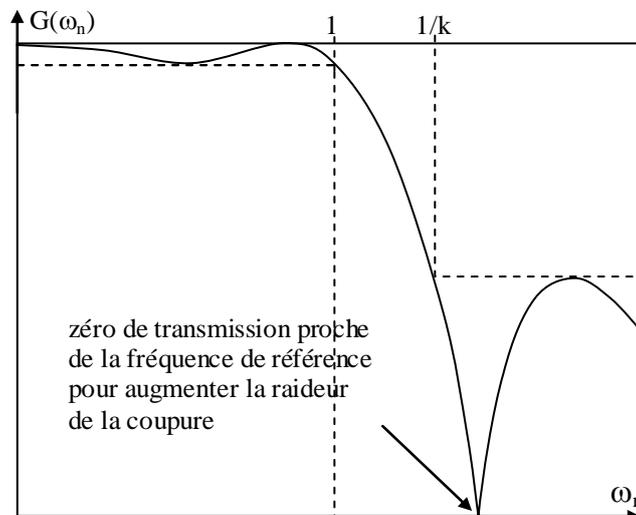
$\varepsilon=1$  correspond à un gain de -3 dB à  $\omega_n=1$

$\varepsilon=0.5$  correspond à un gain de -1 dB à  $\omega_n=1$

## F. Filtres de Cauer

### a. Définition

Les filtres de Cauer possèdent des zéros de transmission dans la bande coupée. Cela permet d'éliminer des fréquences indésirables comme par exemple la fréquence porteuse, résidu de démodulation. Cela permet également d'augmenter la raideur de la coupure si le premier zéro de transmission est proche de la fréquence de coupure.



Leur gain se met sous la forme suivante :

$$|H(\omega_n)| = \frac{N(\omega_n^2)}{D(\omega_n^2)}$$

### b. Propriétés

Les filtres de Cauer ondulent dans la bande passante, et, comme les filtres de Chebychev, possèdent  $n$  pentes.

Ils possèdent  $n/2$  (arrondi à l'entier inférieur) zéros dans la bande coupée.

Leur asymptote quand  $\omega_n$  tend vers l'infini, est horizontale pour les filtres d'ordre pair, et vaut  $-20\text{dB/décade}$  pour les filtres d'ordre impair.

La coupure autour de la fréquence de référence est la plus raide des prototypes décrit dans ce cours, mais la phase est la moins linéaire dans la bande passante.

## G. Filtres de Bessel (Thomson)

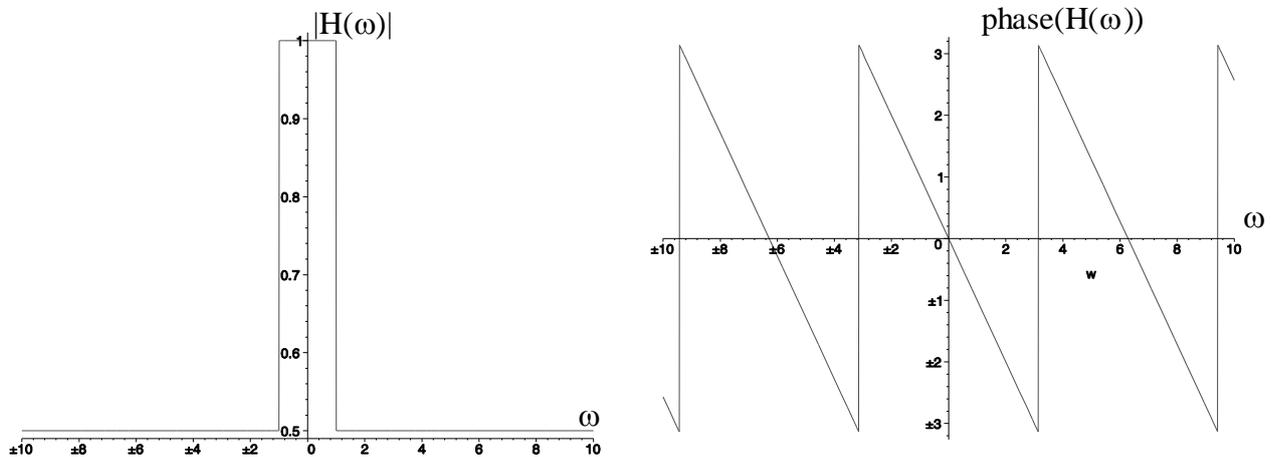
### a. Définition et problématique

Contrairement aux autres prototypes, les filtres de Bessel ne sont pas caractérisés par une forme particulière du gain mais par le fait que l'on cherche à avoir une phase la plus linéaire possible dans la bande passante pour limité au maximum la distorsion des signaux

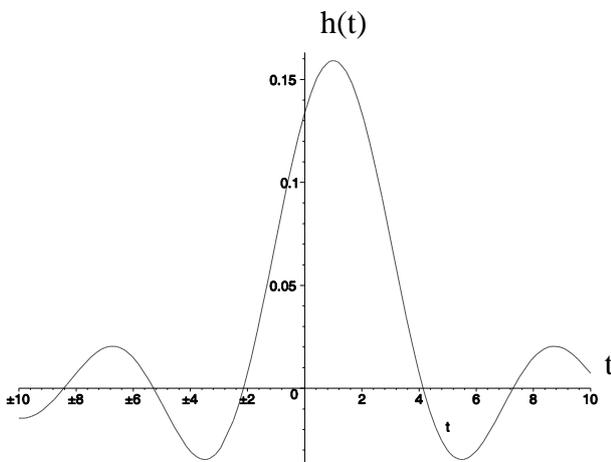
La fonction de transfert doit correspondre à un retard pur et est donc de la forme suivante dans la bande passante :

$$H(p_n) = e^{-p_n} = \frac{1}{e^{p_n}}$$

En effet, la réponse fréquentielle d'un tel filtre est dans la bande passante:  $H(\omega_n) = e^{-j\tau\omega_n}$  c'est-à-dire possède un gain constant égal à 1 (voir figure ci-dessous à gauche) et dont la phase décroît linéairement (voir figure ci-dessous à droite),



Malheureusement, cette réponse fréquentielle ne correspond pas à un filtre physiquement réalisable puisque la réponse impulsionnelle est non causale ( $h(t)=\text{TF}^{-1}(H(\omega))$ ) c'est à dire qu'elle commence avant  $t=0$  comme on peut le voir sur la figure ci-dessous.



b. Détermination de la fonction de transfert d'un filtre de Bessel

a) Une 1<sup>ère</sup> méthode consiste à faire un développement limité de Taylor de  $H(p_n) = \frac{1}{e^{p_n}}$  à l'ordre du filtre considéré.

Cette méthode ne donne cependant pas de bons résultats car la phase n'est pas correctement approchée avec ce développement.

b) Une seconde méthode consiste à faire un développement plus précis en utilisant les fractions continue de polynômes. Nous passerons le calcul et donnons le résultat ci-dessous. La fonction de transfert d'un filtre de Bessel d'ordre n est donné par :

$$H_n(p) = \frac{a_0^n}{\sum_{i=0}^n a_i^n p^i} \quad \text{où} \quad a_i^n = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i} (n-i)! i!}$$

Les polynômes au dénominateur de H(p) sont des polynômes de Bessel B<sub>n</sub>(p). Ils peuvent encore s'exprimer de la manière suivante :

$$B_n(p) = (2n-1)B_{n-1}(p) + p^2 B_{n-2}(p) \quad \text{et} \quad B_0(p) = 1 \quad \text{et} \quad B_1(p) = 1 + p$$

c) Une troisième méthode consiste à partir d'une fonction de transfert polynomiale quelconque, et d'imposer que la phase de la réponse fréquentielle correspondante soit la plus linéaire possible dans la bande passante.

Prenons pour cela une fonction de transfert du type  $H(p) = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{(n-1)} + \dots + a_1 p + a_0}$ , ce qui correspond à la

$$\text{réponse fréquentielle} \quad H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{(n-1)} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

Dans le but de calculer les coefficients a<sub>0</sub>, a<sub>1</sub>, ..., a<sub>n-1</sub>, on impose que la phase φ(ω) de la réponse fréquentielle soit la plus linéaire possible dans la bande passante, c'est-à-dire que :

$$\left. \frac{d\varphi}{d\omega} \right|_{\omega=0} = -1 \quad ; \quad \left. \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{d^3\varphi}{d\omega^3} \right|_{\omega=0} = 0 \quad ; \quad \dots \quad \left. \frac{d^k\varphi}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = 0 \quad \dots$$

jusqu'à disposer d'autant d'équations que d'inconnues a<sub>k</sub>. (il faut remarquer que les dérivées paires de φ sont forcément nulles et ne comptent donc pas dans le nombre d'équation nécessaire.)

Un exemple de script Mapple™ donné ci-dessous, applique le procédé que l'on vient de décrire dans le cas d'une fonction de transfert d'ordre 4.

**H:=1/(a0+a1\*p+a2\*p^2+a3\*p^3+p^4);**

$$H := \frac{1}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + p^4}$$

**p:=I\*w;**

```

assume (w, real) ;
assume (a0>0) ;
assume (a1>0) ;
assume (a2>0) ;
assume (a3>0) ;
H;

```

$$H(\omega) = \frac{1}{a_0 + I a_1 \omega - a_2 \omega^2 - I a_3 \omega^3 + \omega^4}$$

```

phi := -I * ln (H / abs (H)) ;
phi1 := diff (phi, w) ;
phi3 := diff (diff (phi1, w), w) ;
phi5 := diff (diff (phi3, w), w) ;
phi7 := diff (diff (phi5, w), w) ;

f1 := subs (w=0, phi1) ;
f3 := subs (w=0, phi3) ;
f5 := subs (w=0, phi5) ;
f7 := subs (w=0, phi7) ;

eqns := {f1=-1, f3=0, f5=0, f7=0} ;
sols := solve ( eqns ) ;

```

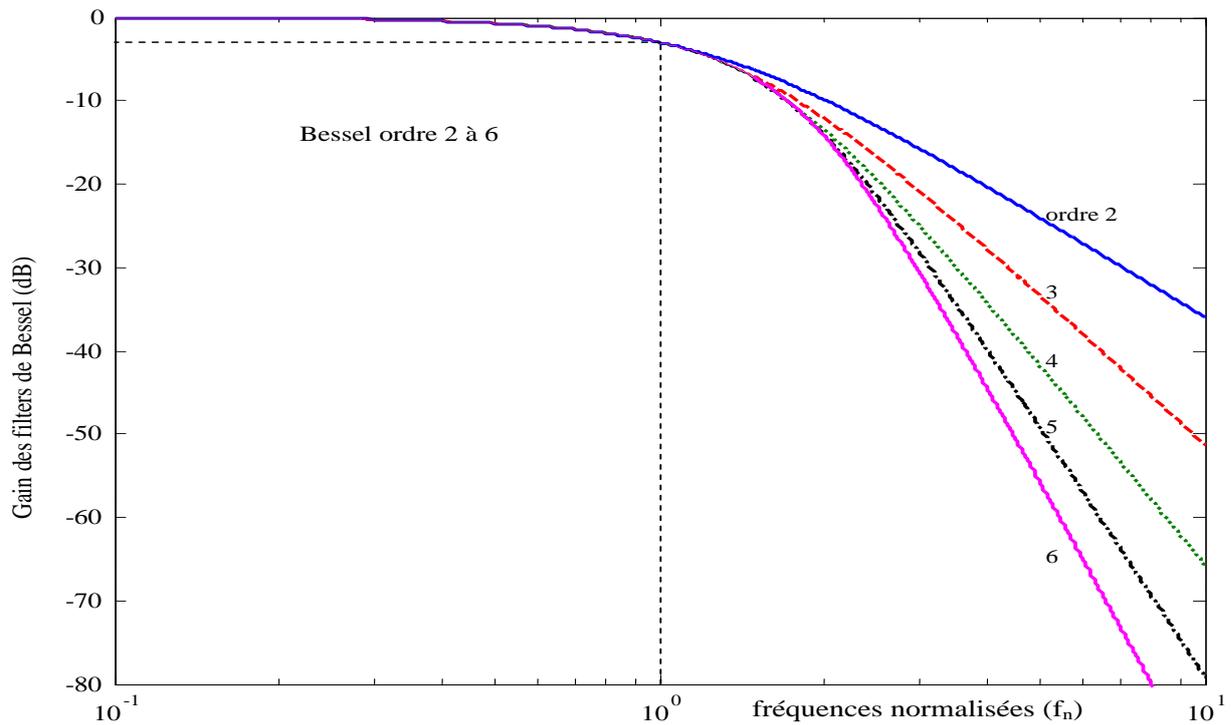
$sols := \{a_0 = 105, a_1 = 105, a_2 = 45, a_3 = 10\}$

et on trouve la fonction de transfert de Bessel du 4<sup>eme</sup> ordre :  $H(p) := \frac{1}{105 + 105p + 45p^2 + 10p^3 + p^4}$

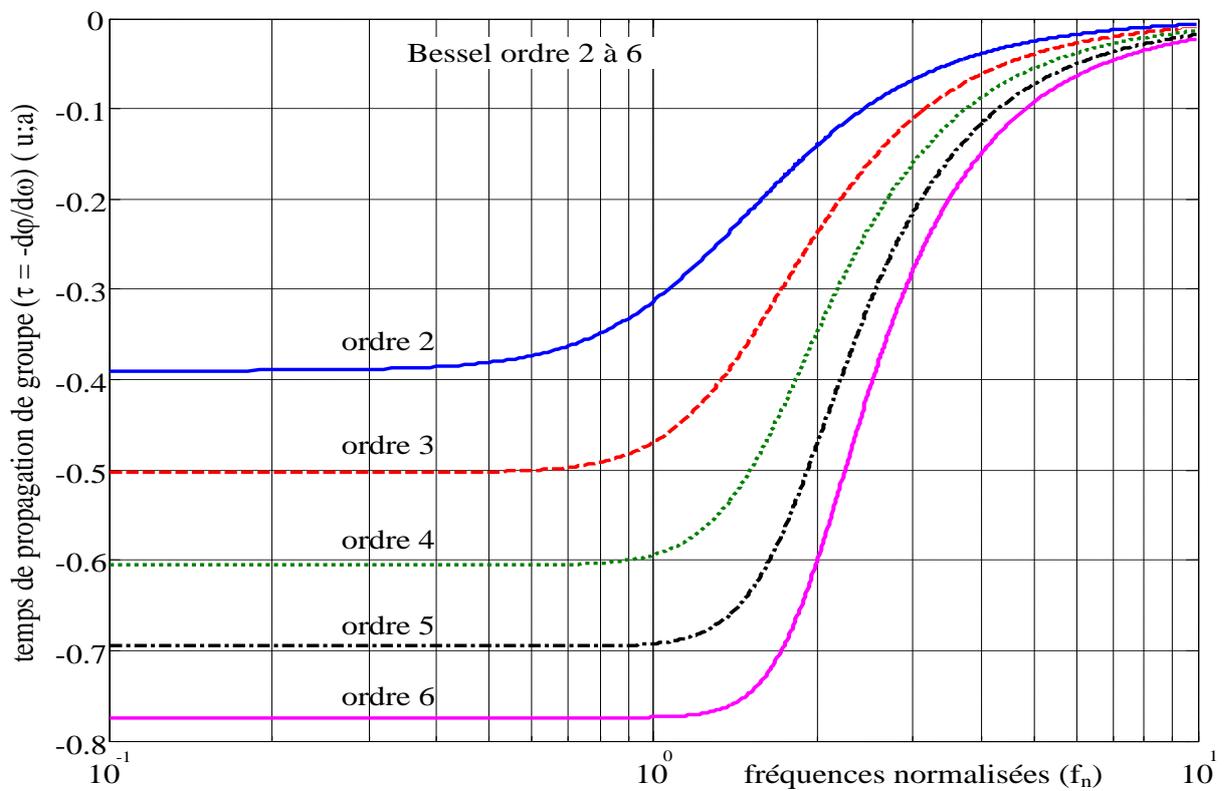
Remarques :

Les fonctions de transfert des filtres de Bessel que l'on obtient par les méthodes ci-dessus ne sont pas normalisées à -3dB. Une normalisation en fréquence et en amplitude est ensuite nécessaire pour obtenir des réponses normalisées (à -3dB par exemple) à  $\omega=1$ .

c. Réponse fréquentielle des filtres de Bessel



On constate que la réponse d'un filtre de Bessel est quasi indépendante de l'ordre dans la bande passante.



On constate que la linéarité de la phase est d'autant meilleure que l'ordre du filtre est élevé.

d. *Propriétés*

Les filtres de Bessel sont les filtres qui déforment le moins les signaux dans la bande passante.

Par contre leur coupure est la moins raide de tous, et ils sont pour cette raison très difficiles à utiliser car ils nécessitent des ordres très élevés.

Leur pente en  $\omega \rightarrow \infty$  est en  $-20 n$  dB/décade ( $n$ =ordre du filtre) comme tous les autres filtres polynômiaux.

Remarque : Les filtres obtenus par transposition d'un filtre passe bas de Bessel ne possèdent pas les propriétés des filtres de Bessel. En effet, les formules de transposition n'ont pas été prévues pour conserver des propriétés de phase mais plutôt pour conserver les propriétés du gain. Pour cette raison, nous ne réaliserons pas de filtre de Bessel autres que Passe Bas.

H. Filtres Gaussien

a. *Intérêt des filtres Gaussien.*

Comme tout système linéaire, la sortie  $y(t)$  du filtre est le produit de convolution de l'entrée  $x(t)$  par la TF<sup>-1</sup>(H) qui est également une gaussienne. Filtrer un signal par ce système revient, dans le domaine temporel, à faire une "moyenne glissante" du signal d'entrée à l'aide d'une fenêtre temporelle de forme régulière et de longueur bien définie, et dans le domaine fréquentiel, d'atténuer les fréquences par une fenêtre également régulière et bien définie.

Ce filtrage est intéressant car il respecte assez bien la forme temporelle d'impulsions comme les filtres de Bessel tout en possédant une coupure un peu plus raide que ceux-ci. Par contre il n'est pas possible de réaliser ces filtres de manière analogique.

Pour cette raison, ils sont réalisés en numérique pour le filtrage des signaux numériques impulsionnels par exemple dans le domaine des télécommunications.

En analogique, on ne peut approcher les filtres Gaussien que par les filtres de Bessel.

b. *Réalisation du filtre*

On veut que le module du gain se rapproche d'une gaussienne :  $|H(j\omega)|^2 = e^{-\omega^2}$

d'où 
$$H(p)H(-p) = e^{p^2} = \frac{1}{e^{-p^2}}$$

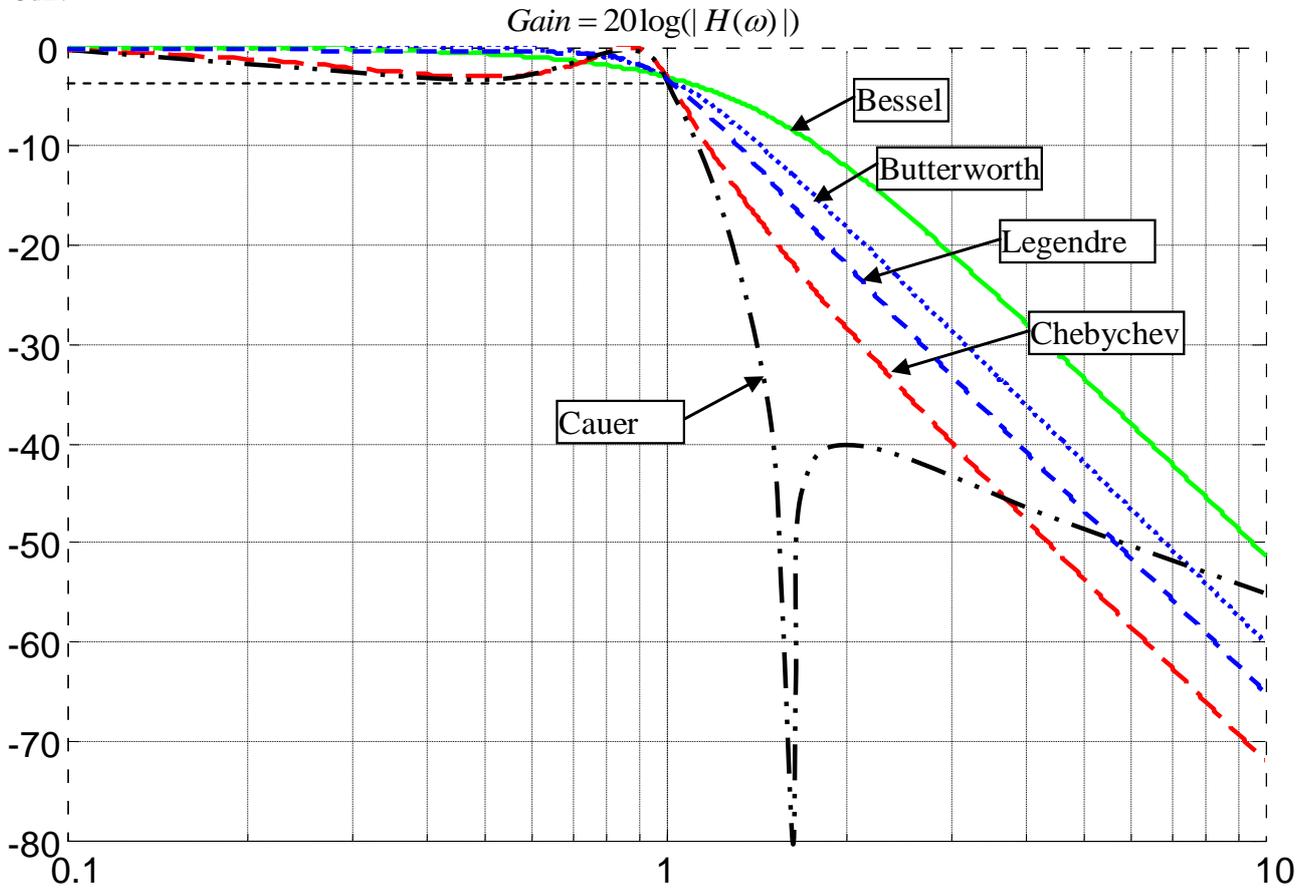
c'est à dire 
$$D(p)D(-p) = e^{-p^2} = 1 - (-p^2) + \frac{(-p^2)^2}{2!} - \frac{(-p^2)^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{p^{2n}}{n!}$$

On arrête le développement limité à l'ordre  $n$ , ce qui définit l'ordre du filtre. Puis on extrait les racines de  $D(p)D(-p)$ , on élimine les racines à partie réelles positive de manière à obtenir  $D(p)$  stable et à déphasage minimal, d'où le  $H(p)$  désiré.

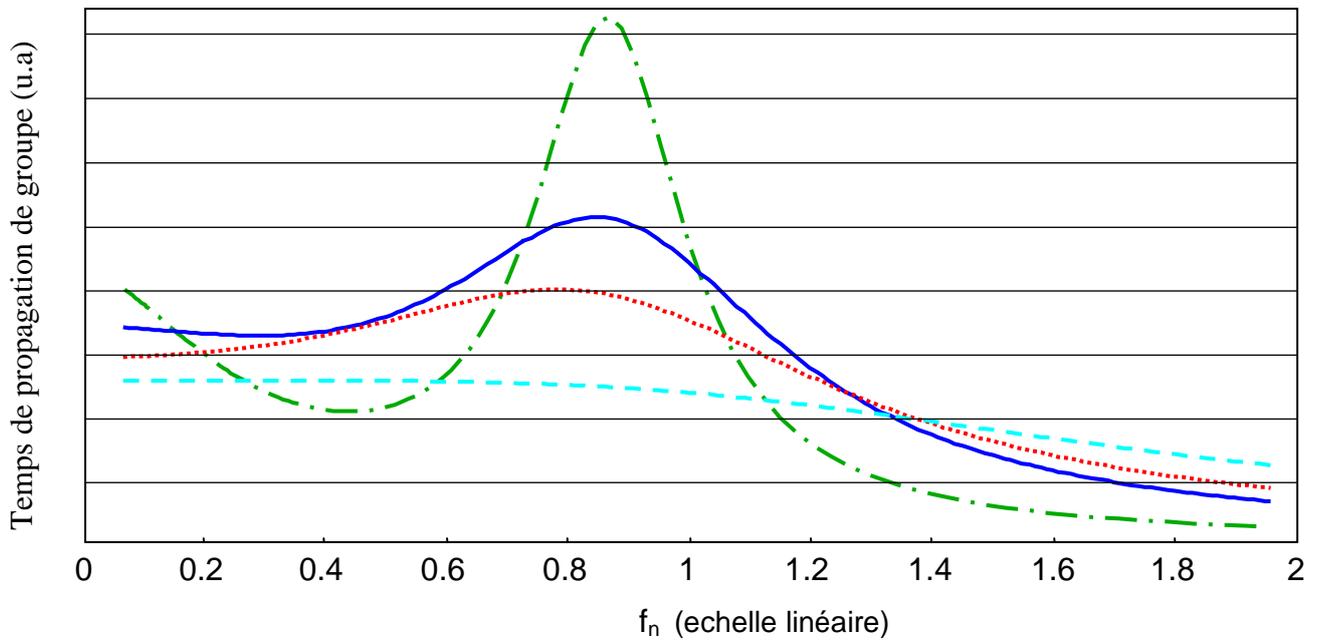
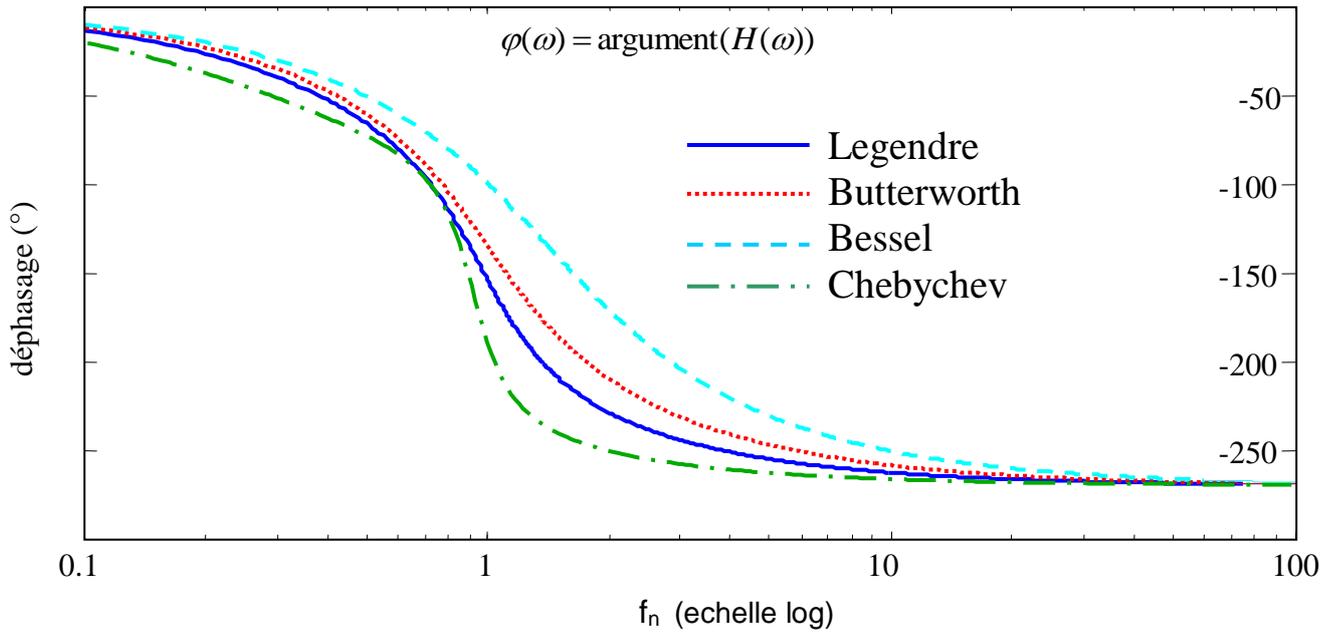
Plus l'ordre du développement limité est élevé (et donc l'ordre du filtre), plus la fonction de transfert des filtres gaussien se rapprochent d'une gaussienne.

### I. Comparaison des filtres

La figure suivante montre les différences de comportement de gain de différents prototypes de filtres d'ordre 3 normalisés à -3dB.



La figure suivante montre la phase en fonction de la fréquence pour chacun des filtres prototypes décrit précédemment. On voit aussi, en bas de la figure, un tracé du temps de propagation de groupe ( $-\frac{d\phi}{d\omega}$ ) pour chacun des prototypes. On constate que seul le filtre de Bessel possède un temps de propagation de groupe à peu près constant dans la bande passante.



## 5. Synthèse des filtres passifs

Comme nous l'avons expliqué précédemment les filtres en hyperfréquence sont toujours constitués d'éléments passifs (bobines, condensateurs, lignes de transmission, cavités, ...) et n'utilisent jamais d'amplificateurs opérationnels. Nous allons voir dans ce chapitre la synthèse des filtres passifs en  $\Pi$  ne comprenant que des inductances et des condensateurs. Il existe aussi une structure de filtres dit en T $\acute{e}$ . La méthode de synthèse de cette dernière structure est identique à celle en  $\Pi$  et ne sera pas traité ici.

### A. Filtres Passe-bas

Nous n'étudierons dans ce chapitre que les filtres en  $\Pi$  dont la structure est la suivante :

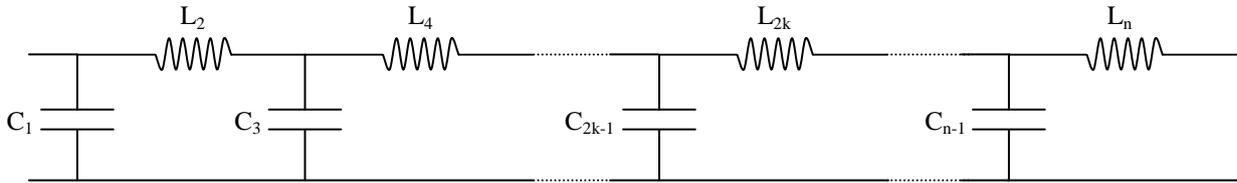


Figure 16 : Filtre passe bas d'ordre n

Le calcul des composants  $C_{2k-1}$  et  $L_{2k}$  se fait par dénormalisation des composants normalisés que l'on trouve dans les tableaux fournis.

Par exemple si on désire réaliser un filtre de Butterworth d'ordre 3 (voir chapitre 4 "Filtres Prototypes"), il suffit de relever les valeurs normalisées des composants dans le tableau correspondant.

*Filtres symétriques*  $g_0 = g_{n+1} = 1$

$n \backslash g$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$
2	1.414	1.414								
3	1.000	2.000	1.000							
4	0.7654	1.848	1.848	0.7654						
5	0.6180	1.618	2.000	1.618	0.6180					
6	0.5176	1.414	1.932	1.932	1.414	0.5176				
7	0.4450	1.247	1.802	2.000	1.802	1.247	0.4450			
8	0.3902	1.111	1.663	1.962	1.962	1.663	1.111	0.3902		
9	0.3473	1.000	1.532	1.879	2.000	1.879	1.532	1.000	0.3473	
10	0.3129	0.9080	1.414	1.782	1.975	1.975	1.782	1.414	0.9080	0.3129

Figure 17 : Exemple de tableau de coefficients

Ainsi on trouve pour un filtre symétrique de Butterworth d'ordre 3 ( $Z_{géné} = Z_{charge} = R_0$ ):

$$g_1 = g_3 = 1 \text{ et } g_2 = 2 \text{ ou encore en reprenant les notations du chapitre 2, } c_1 = c_3 = 1 ; \ell_2 = 2$$

Les coefficients impairs sont les valeurs de capacités normalisées tandis que les coefficients pairs sont les inductances normalisées.  $g_0$  représente l'impédance normalisées du générateur et  $g_{n+1}$  l'admittance normalisée de la charge.

Le filtre normalisé correspondant à notre exemple est donc :

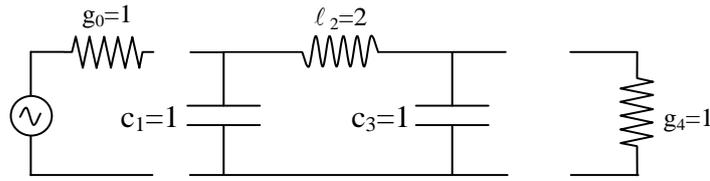


Figure 18: prototype passe bas d'un filtre symétrique de Butterworth du 3<sup>eme</sup> ordre.

Si on note  $f_0$  la fréquence de référence, les formules de dénormalisation vues au chapitre b(Normalisation des impédances) permettent de calculer les valeurs réelles des composants :

$$C_i = \frac{c_i}{R_0 \omega_0} \text{ et } L_i = \frac{R_0 l_i}{\omega_0}$$

En supposant que le filtre pris en exemple doivent laisser passer toutes les fréquences jusqu'à  $f_p=2$  GHz , on a alors :

$$C_1 = \frac{g_1}{R_0 2\pi f_0} = \frac{1}{50 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^9} = 1.59 \text{ pF} ; \quad L_2 = \frac{R_0 g_2}{2\pi f_0} = \frac{50 \times 2}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^9} = 8 \text{ nH} ; \quad C_3 = C_1 = 1.59 \text{ pF} ,$$

en prenant  $R_0 = 50 \Omega$  .

Le filtre dénormalisé est donc:

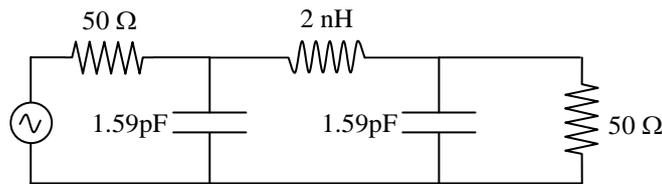


Figure 19: Filtre passe bas de Butterworth du 3<sup>eme</sup> ordre

## B. Filtres Passe-haut

### a. Méthode générale

La structure des filtres Passe-haut est obtenue par transposition de la structure des filtres passe-bas détaillés plus hauts. On a vu au chapitre V comment il est possible de transformer un filtre passe bas en un filtre passe-haut en conservant ses propriétés principales (forme du gain, sélectivité...).

On rappelle ici qu'il suffit de remplacer dans la fonction de transfert  $p_n \xrightarrow{\text{par}} \frac{1}{p_n}$  . On vu également que cette transposition

transforme les capacités en inductances et les inductances en capacités. Ainsi un filtre passe-bas en  $\pi$  se transforme en un filtre passe-haut comme le montre la figure suivante :

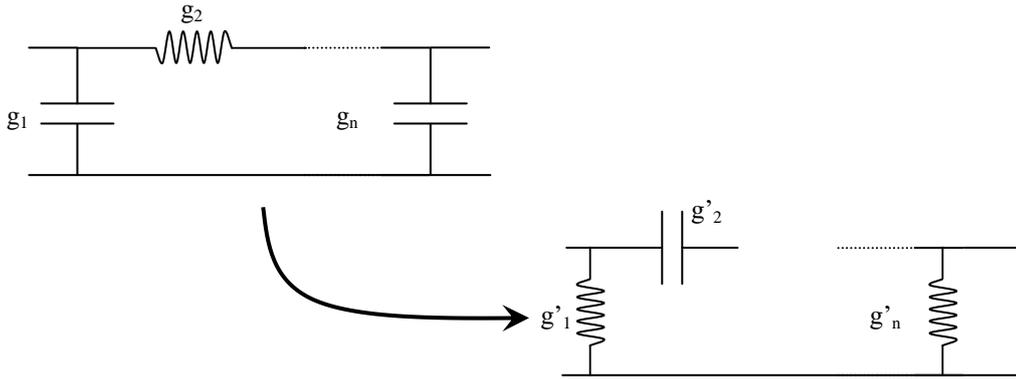


Figure 20: Transposition Passe-bas  $\rightarrow$  Passe-haut

Et les valeurs normalisées des composants du passe-haut s'obtiennent en appliquant les formules du chapitre V :  $g'_k = \frac{1}{g_k}$ .

Le calcul des composants du filtre Passe haut ( $L'_{2k-1}$  et  $C'_{2k}$ ) à partir des valeurs normalisées des composants du filtre passe

bas ( $g'_{2k-1}$  et  $g'_{2k}$ ) de départ se fait en utilisant les formules de dénormalisation :  $L'_{2k-1} = \frac{g'_{2k-1} R_0}{\omega_0}$  et  $C'_{2k} = \frac{g'_{2k}}{R_0 \omega_0}$ .

Ce qui donne finalement en combinant les relations précédentes :

Filtre passe haut	$L'_{2k-1} = \frac{R_0}{g'_{2k-1} \omega_0}$ et $C'_{2k} = \frac{1}{g'_{2k} R_0 \omega_0}$
-------------------	--

*b. Exemple*

On désire fabriquer un filtre passe haut de 1<sup>ère</sup> fréquence passante  $f_p = 1$  GHz, du 3<sup>ème</sup> ordre du filtre passe bas normalisé suivant :

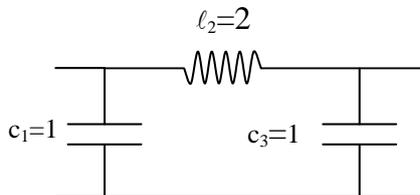


Figure 21 : Filtre passe bas normalisé de départ

Il faut d'abord transposer le filtre passe bas normalisé pour le transformer en filtre passe haut normalisé.

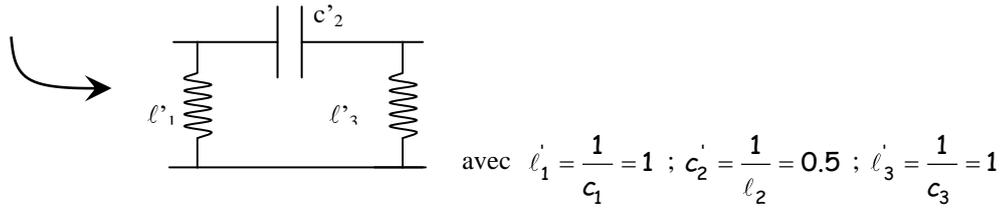


Figure 22 : Filtre passe haut normalisé obtenu

Il faut ensuite le dénormaliser à la fréquence de travail  $f_0=f_p=1$  GHz.

$$L'_1 = \frac{l'_1 R_0}{\omega_0} = 8nH \ ; \ C'_2 = \frac{c'_2}{R_0 \omega_0} = 6.37 pF \ \text{et} \ L'_3 = L'_1 = 8nH$$

La réponse fréquentielle est obtenue par transposition et dénormalisation de la réponse du filtre passe bas normalisé :

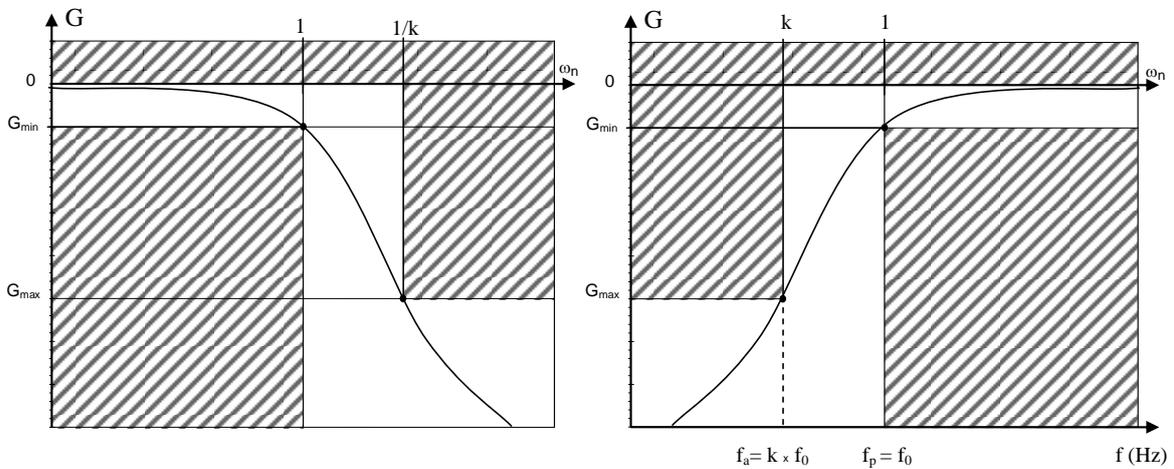


Figure 23 : Réponse fréquentielle du prototype passe bas normalisé retenu à gauche, et réponse fréquentielle du filtre passe haut synthétisé à partir du prototype passe bas à droite

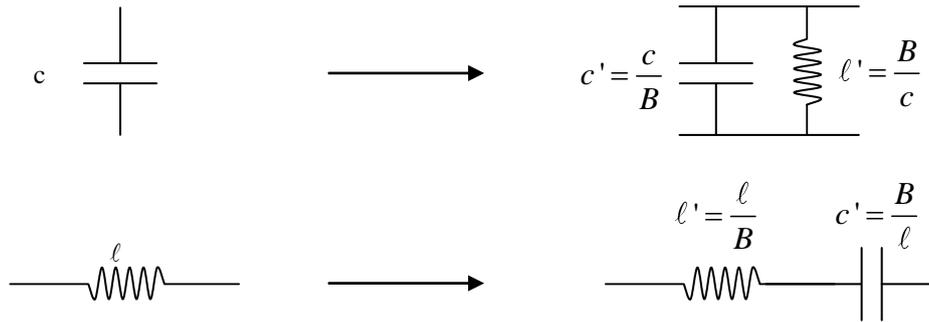
## C. Filtres Passe-bande

### a. Généralité

On a vu au chapitre b que l'on peut passer d'un filtre Passe bas à un filtre Passe Bande par la transposition :

$$p_n \xrightarrow{\text{par}} \frac{1}{B} \left[ p_n + \frac{1}{p_n} \right]$$

On a vu également que les composants normalisés du filtre Passe Bas deviennent par transposition :



Le calcul des valeurs des composants du filtre Passe Bande se fait par dénormalisation des  $c'$  et  $l'$  :

$$C' = \frac{c'}{R_0 \omega_0} \text{ et } L' = \frac{R_0}{l' \omega_0}$$

Enfin on passe du gabarit Passe Bande au gabarit Passe Bas de la manière suivante :

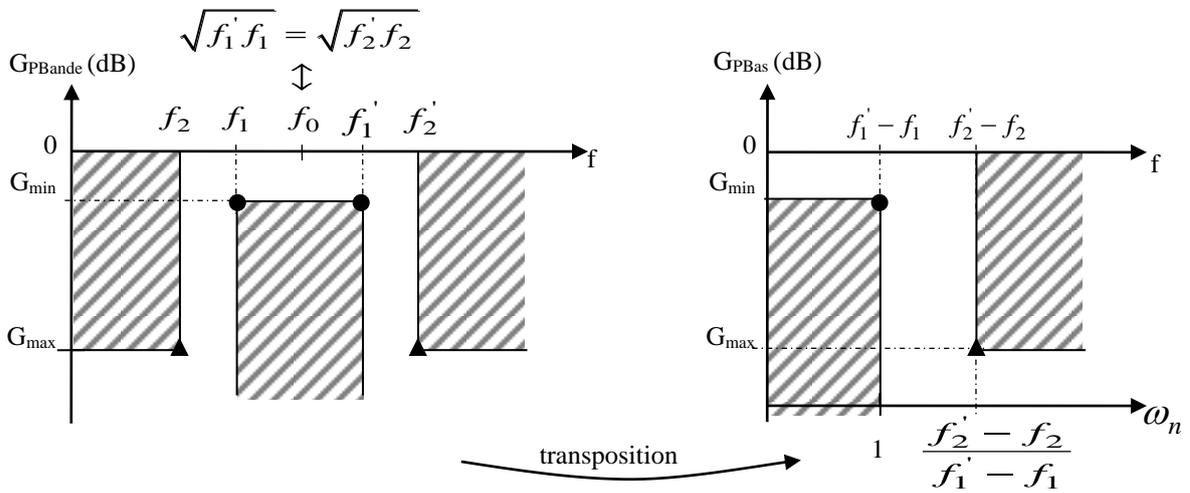
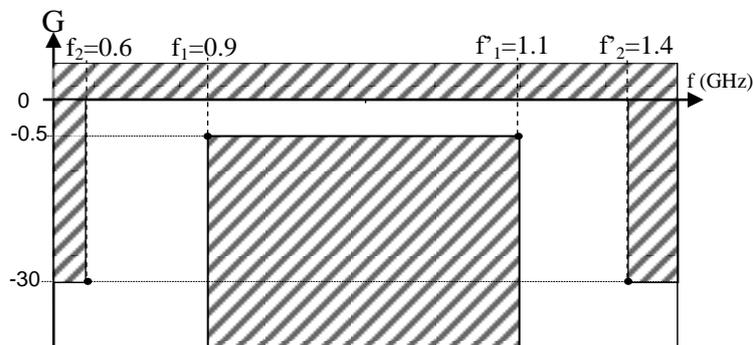


Figure 24 : gabarit du filtre passe bande (à gauche), et du prototype passe bas normalisé (à droite).

**b. Exemple**

On veut fabriquer un filtre Passe Bande de bande passante  $0.9 \rightarrow 1.1$  GHz avec une atténuation maximale dans la bande de 0.5dB, et qui atténue les fréquences d'au moins 30 dB en dessous de 0.6 GHz et au-dessus de 1.4 GHz.



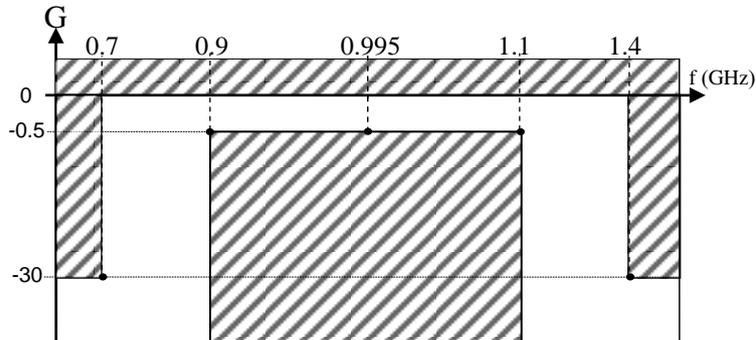
On calcule la fréquence centrale  $f_0$  par :  $f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_1'} = 0.995 \text{ GHz}$  et  $f_0 = \sqrt{f_2 \cdot f_2'} = 0.916 \text{ GHz}$

Traitement des signaux analogiques

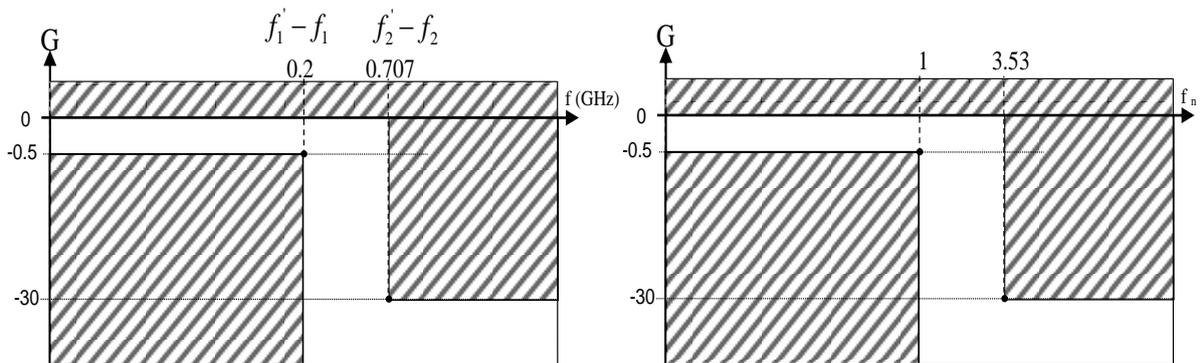
On constate que le gabarit n'est pas symétrique puisque  $\sqrt{f_1 \cdot f_1'} \neq \sqrt{f_2 \cdot f_2'}$ . Il faut donc rendre le gabarit symétrique tout en restant compatible avec le cahier des charges. Une solution consiste à augmenter  $f_2$ .

Par exemple il faut que  $\sqrt{f_2 \cdot f_2'} = 0.995 \text{ GHz}$  ce qui donne  $f_2 = 0.995^2 / f_2' = 0.707 \text{ GHz}$

D'où le gabarit symétrisé suivant :



On en déduit le gabarit du Passe Bas associé :



Puis on cherche parmi les prototypes celui qui conviendrait et l'ordre nécessaire.

On constate en regardant les gains des prototypes qu'un filtre de Chebyshev d'ondulation 0.5 dB d'ordre 3 suffit.

Les tableaux donnent alors les valeurs normalisées des composants du filtre passe bas associé :

$$g_0 = 1 ; g_1 = 1.5963 ; g_2 = 1.0967 ; g_3 = 1.5963 ; g_4 = 1$$

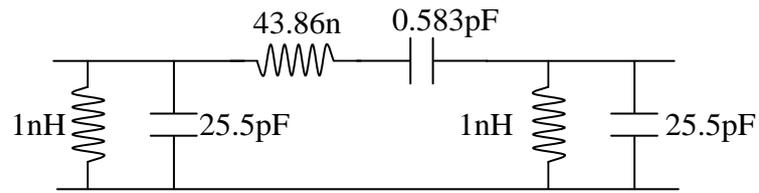
Le calcul des composants du filtre Passe Bande donne :

$$C_1' = \frac{g_1}{B R_0 \omega_0} \quad L_1' = \frac{B R_0}{g_1 \omega_0} \quad C_2' = \frac{B}{g_2 R_0 \omega_0} \quad L_2' = \frac{g_2 R_0}{B \omega_0} \quad C_3' = C_1' \quad L_3' = L_1'$$

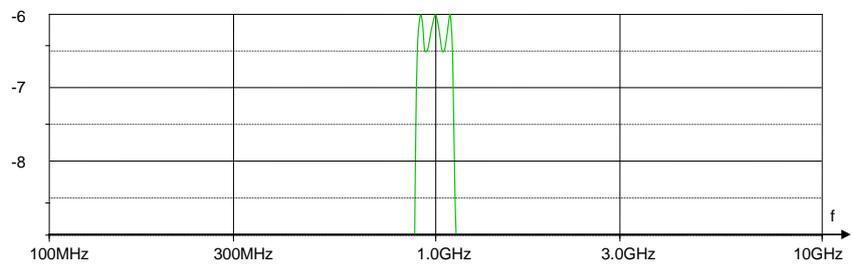
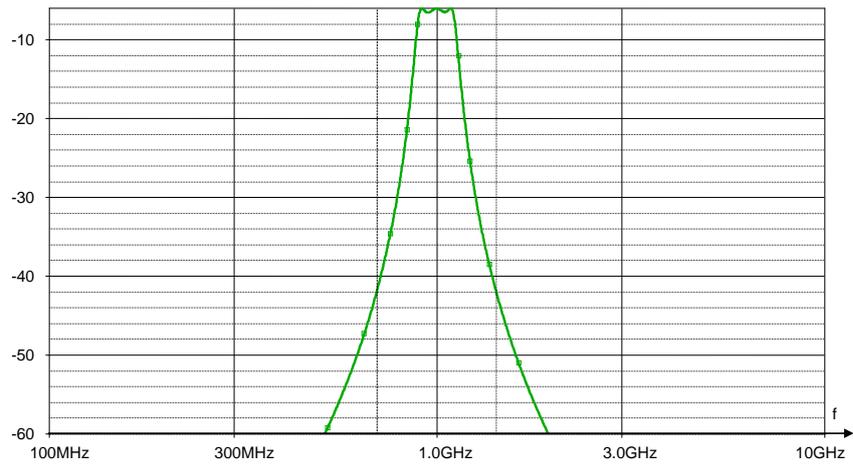
$$\text{avec } B = \frac{0.2}{0.995} = 0.2 = 20\% \quad \text{et } \omega_0 = 2\pi \cdot 0.995 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

$$\text{ce qui donne : } C_1' = 25.5 \text{ pF} \quad L_1' = 1 \text{ nH} \quad C_2' = 0.583 \text{ pF} \quad L_2' = 43.86 \text{ nH} \quad C_3' = C_1' \quad L_3' = L_1'$$

et le schéma du filtre passe bande est le suivant :



Sa réponse fréquentielle est obtenue à partir de celle du passe bas normalisé :



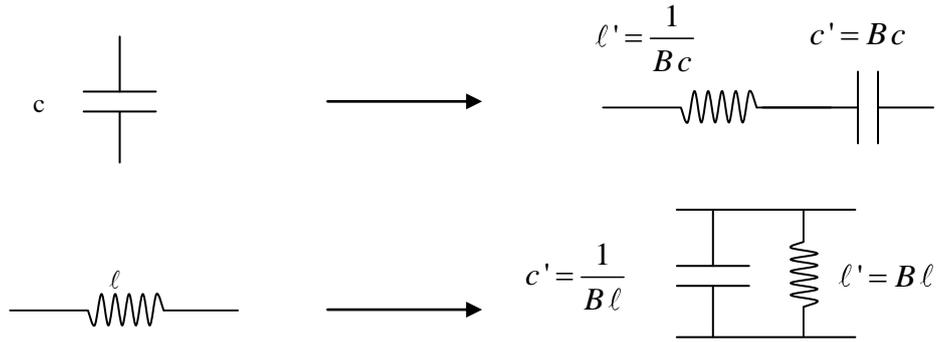
## D. Filtres Coupe-bande

### a. Généralités

On a vu au chapitre V que l'on peut passer d'un filtre Passe Bas à un filtre Coupe bande par la transposition :

$$p_n \xrightarrow{\text{par}} \left[ p_n + \frac{1}{p_n} \right] \quad \text{où } B = \frac{\omega_2' - \omega_2}{\omega_0}$$

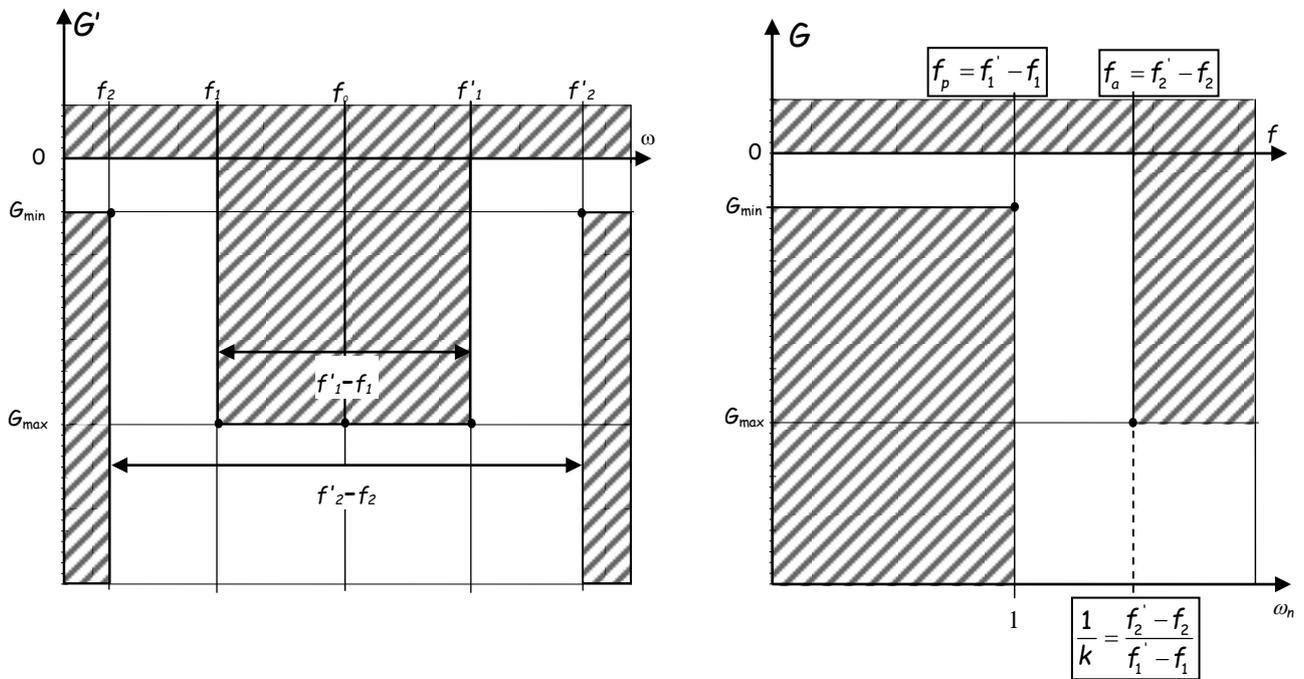
On a vu également que les composants normalisés du filtre Passe Bas deviennent par transposition :



Le calcul des valeurs des composants du filtre Passe Bande se fait ensuite par dénormalisation des  $c'$  et  $\ell'$ .

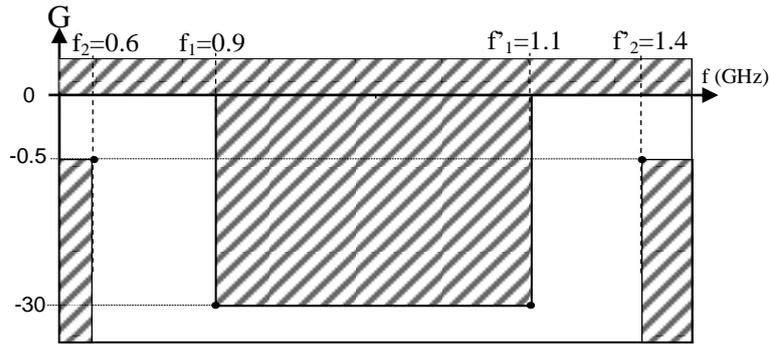
$$C' = \frac{c'}{R_0 \omega_0} \text{ et } L' = \frac{\ell' R_0}{\omega_0}$$

Enfin on passe du gabarit Passe Bande au gabarit Passe Bas de la manière suivante :



*b. Exemple :*

On veut fabriquer un filtre Coupe Bande de bande coupée  $0.9 \rightarrow 1.1$  GHz avec une atténuation minimale dans la bande coupée de 30 dB, et qui laisse passer les fréquences avec une atténuation maximale de 0.5dB en dessous de 0.6 GHz et au-dessus de 1.4 GHz.



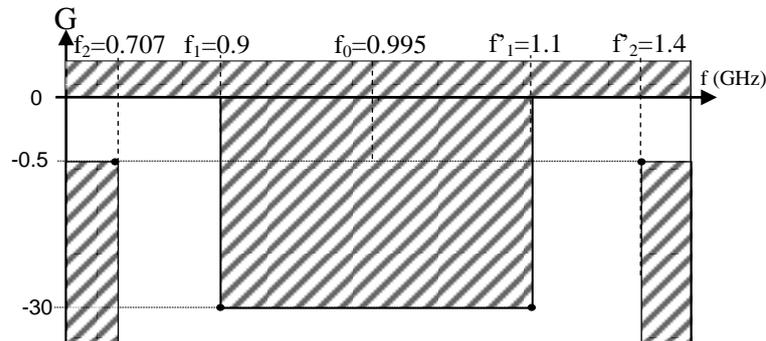
La fréquence centrale  $f_0$  est calculée par les relations :

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f'_1} = 0.995 \text{ GHz} \quad \text{et} \quad f_0 = \sqrt{f_2 \cdot f'_2} = 0.916 \text{ GHz}$$

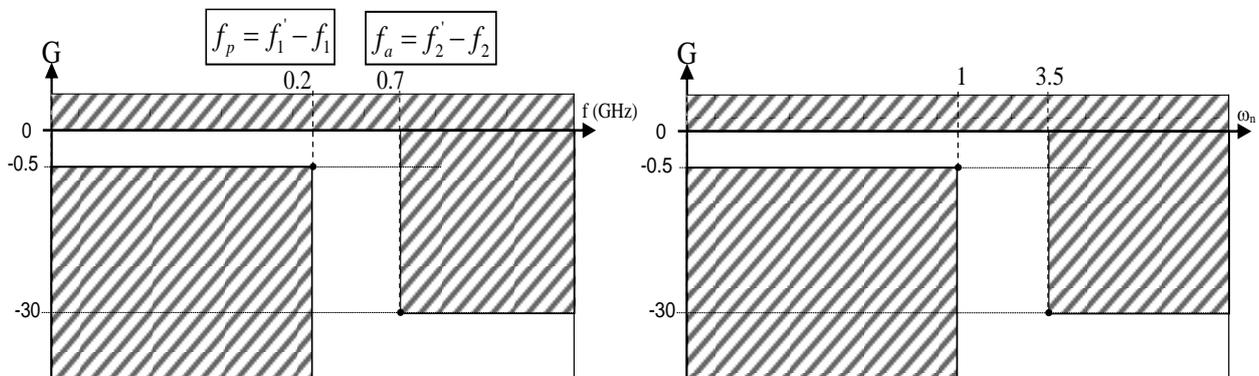
On constate que le gabarit n'est pas symétrique puisque  $\sqrt{f_1 \cdot f'_1} \neq \sqrt{f_2 \cdot f'_2}$ . Il faut donc rendre le gabarit symétrique tout en restant compatible avec le cahier des charges. Une solution consiste à augmenter  $f_2$ .

Par exemple il faut que  $\sqrt{f_2 \cdot f'_2} = 0.995 \text{ GHz}$  ce qui donne  $f_2 = 0.995^2 / f'_2 = 0.707 \text{ GHz}$

D'où le gabarit symétrisé suivant :



On en déduit le gabarit du Passe Bas associé et le passe bas normalisé associé :



Puis on cherche parmi les prototypes celui qui conviendrait et l'ordre nécessaire.

On constate en regardant les gains des prototypes qu'un filtre de Chebychev d'ondulation 0.5 dB d'ordre 3 suffit. Les tableaux donnent alors les valeurs normalisées des composants du filtre passe bas associé :

$$g_0=1 ; g_1=1.5963 ; g_2=1.0967 ; g_3=1.5963 ; g_4=1$$

Le calcul des composants du filtre Passe Bande donne :

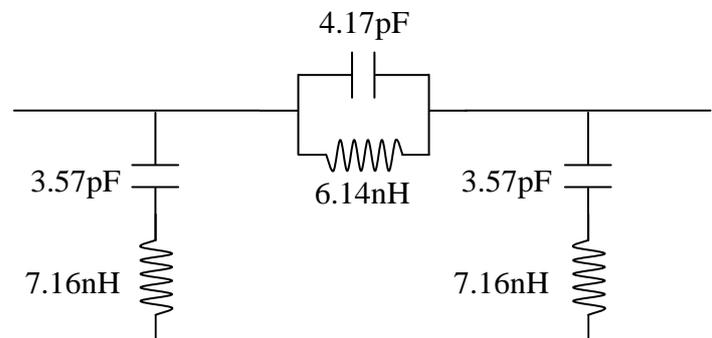
$$C_1' = \frac{B g_1}{R_0 \omega_0} \quad L_1' = \frac{R_0}{B g_1 \omega_0} \quad C_2' = \frac{1}{B g_2 R_0 \omega_0} \quad L_2' = \frac{B g_2 R_0}{\omega_0} \quad C_3' = C_1' \quad L_3' = L_1'$$

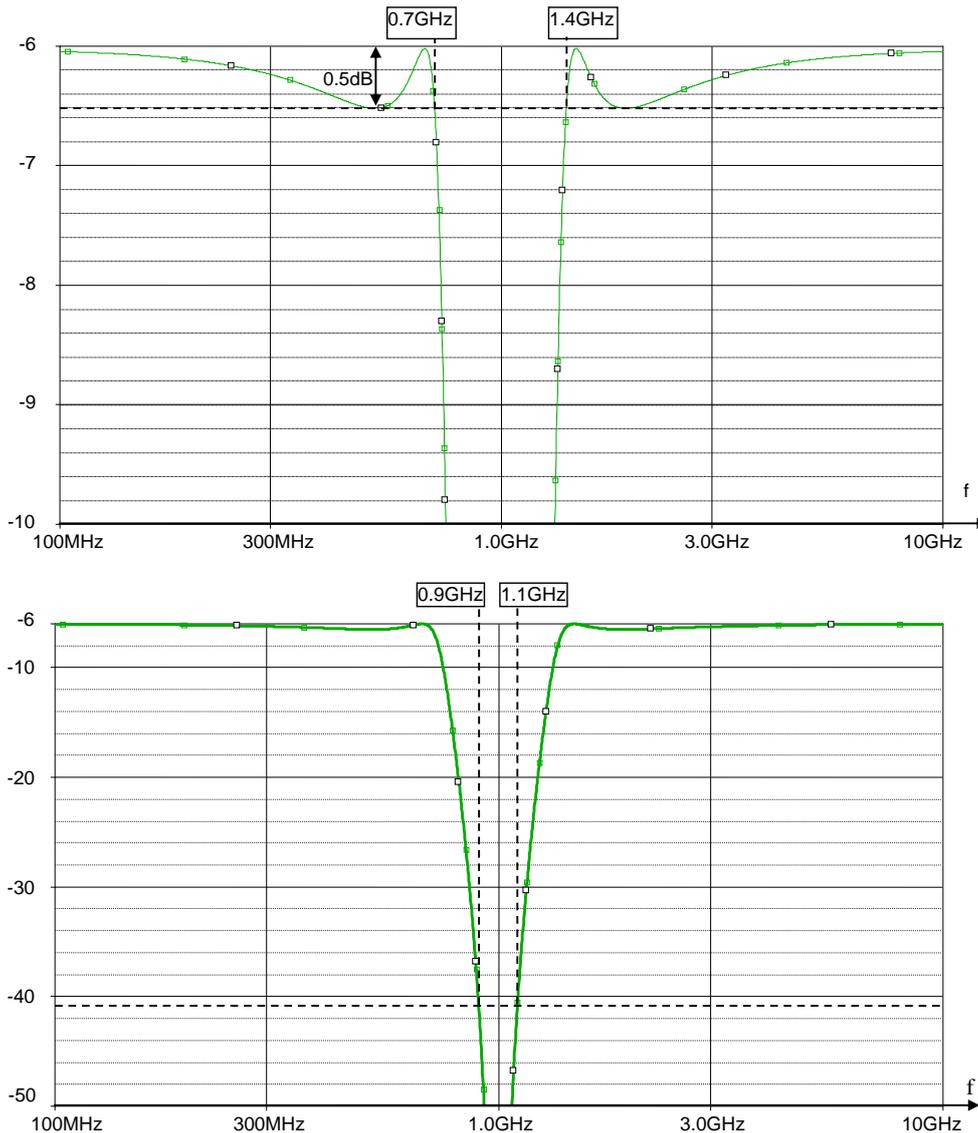
$$\text{avec } B = \frac{(\omega_2' - \omega_1')}{\omega_0} = \frac{0.69}{0.995} = 0.7 = 70\% \quad \text{et } \omega_0 = 2\pi 0.995 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

ce qui donne :

$$C_1' = 3.57 \text{ pF} \quad L_1' = 7.16 \text{ nH} \quad C_2' = 4.17 \text{ pF} \quad L_2' = 6.14 \text{ nH} \quad C_3' = C_1' \quad L_3' = L_1'$$

et le schéma du filtre passe bande est le suivant :





## 6. Synthèse des filtres actifs

### A. Introduction

Dans le chapitre précédent on a vu comment synthétiser des filtres passifs. Les défauts de ceux-ci sont :

- Les filtres passifs intègrent des bobines. Les inductances de celles-ci deviennent très grandes lorsqu'on veut travailler à faibles fréquences. Ces bobines sont alors soit, grosses, encombrantes et chères, soit petites si elles utilisent du fil de petit diamètre. Les pertes s'accroissent alors énormément, ce qui diminue les performances des filtres.
- La mise en cascade est difficile car, quand on met en série 2 filtres de fonctions de transfert connues  $H_1$  et  $H_2$  la fonction de transfert totale  $H$  ne sera pas le produit  $H_1 \cdot H_2$ . Le calcul doit être refait à chaque fois qu'un étage est ajouté car la fonction de transfert dépend de la charge.

Ces filtres passifs sont donc utilisés plutôt à haute fréquence. Lorsque l'on désire travailler à fréquences faibles, on peut utiliser des montages intégrant des amplificateurs opérationnels.

La synthèse des filtres actifs passe par la décomposition de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0} \text{ en éléments simples du 1}^{\text{er}} \text{ ou du 2}^{\text{nd}} \text{ ordre :}$$

$$H(p) = \prod \left[ \frac{1}{1 + \tau p} \times \frac{\tau p}{1 + \tau p} \times \frac{1}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2} \times \frac{\tau p}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2} \times \frac{\tau^2 p^2}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2} \times \frac{1 + \tau'^2 p^2}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2} \right]$$

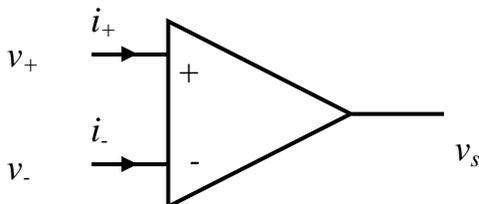
La synthèse des filtres s'effectue alors en cascade de circuits réalisant ces fonctions. Afin que ces étages soient cascadeables sans qu'il soit nécessaire de recalculer leur fonction de transfert, il faut qu'ils soient adaptés en tension, c'est-à-dire, que leur impédance d'entrée soit la plus grande possible et leur impédance de sortie la plus petite possible. C'est la raison pour laquelle cette technique n'est utilisée qu'en actif.

Dans la suite de ce chapitre, quelques rappels sur les amplificateurs opérationnels et les montages classiques sont faits dans la première partie.

Il existe plusieurs méthodes de synthèse des filtres actifs. Dans la seconde partie, nous ne détaillerons que les montages à intégrateur (filtres universels ou filtres à variables d'état) avant de présenter les montages utilisant un seul amplificateur opérationnel à contre réaction positive simple du type Sallen-key.

## B. Rappels sur les amplificateurs opérationnels parfaits et quelques montages classiques.

Nous nous limiterons à la description rapide de quelques montages de base utilisant un amplificateur opérationnel parfait (A.O.P.)



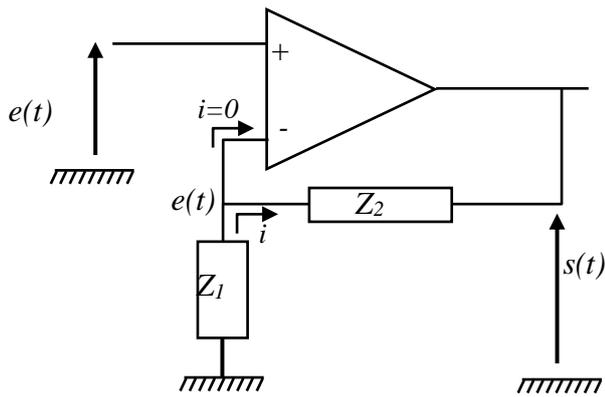
Un A.O.P. parfait est amplificateur différentiel dont les impédances d'entrée et le gain sont infinis. La sortie vaut :  $v_s = G (v_+ - v_-)$

Pour avoir  $v_s \neq \infty$  (ou  $\pm V_{\text{alim}}$ ), il faut que  $v_+ = v_-$ .

De plus les impédances d'entrée sont infinies et les courants d'entrée  $i_+$  et  $i_-$  donc nuls :  $i_+ = i_- = 0$

### a. Amplificateur de gain positif

Un amplificateur de gain positif peut être conçu comme suit :

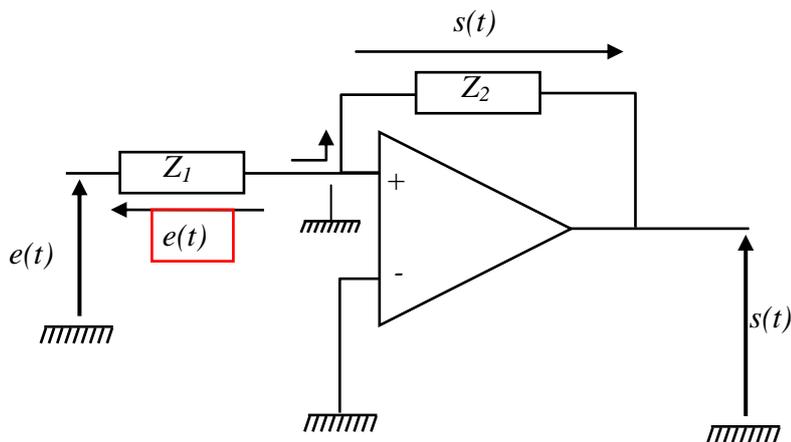


On a  $v_+ = v_-$  donc  $v_- = e$  or  $E = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} S$  donc  $S = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) S$

et si  $Z_1 = R_1$  et  $Z_2 = R_2$  alors  $S = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) S$

b. Amplificateur de gain négatif

Un amplificateur de gain négatif peut être conçu comme suit :

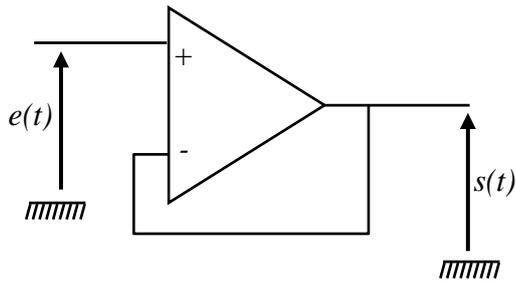


$$V_+ = V_- = 0 \rightarrow \frac{E}{Z_1} = \frac{-S}{R_1} \rightarrow \frac{S}{E} = -\frac{Z_2}{Z_1} \rightarrow \frac{S}{E} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

si  $Z_1 = R_1$  et  $Z_2 = R_2$  alors  $\frac{S}{E} = -\frac{R_2}{R_1}$

c. Montage suiveur

Un montage de fonction de transfert unité peut être réalisé comme suit :



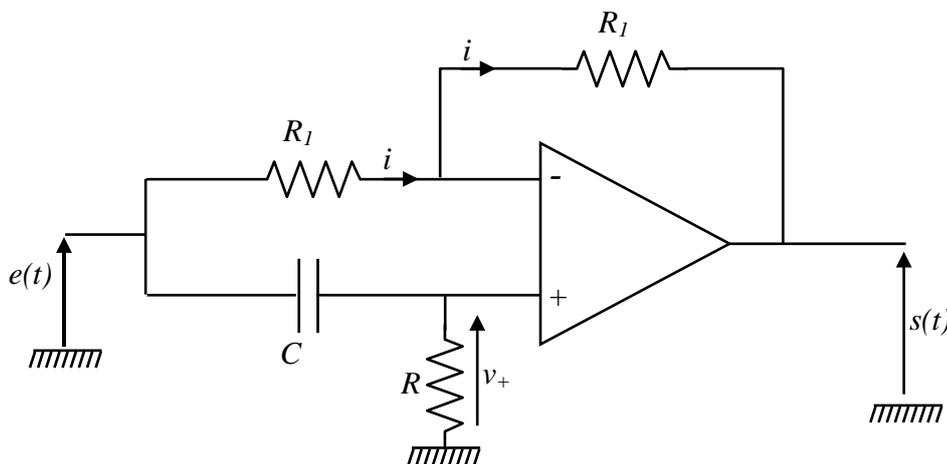
On a en effet  $V_- = V_+ = E$  et  $S = V_-$  d'où  $S = E$ . Ce montage possède une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle. Il rend tout montage placé à son entrée indépendant de la charge placée à sa sortie.

d. Cellule Passe-tout ou déphaseur

Une cellule passe tout d'ordre 1 possède par exemple une fonction de transfert du type :

$$H(p) = \frac{1 - RCp}{1 + RCp} \text{ ce qui donne un gain de : } |H(\omega)| = 1 \text{ et une phase de : } \arg(H) = -\arctg(RC\omega)$$

Un exemple de réalisation donne :



Vérification par le calcul.

$$\text{on a } E - V_- = R_1 I \quad \text{et} \quad V_- = V_+ = \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}} E = \frac{RCp}{1 + RCp} E$$

$$\text{cad : } E \left( 1 - \frac{RCp}{1 + RCp} \right) = R_1 I \quad \text{de plus : } E - S = 2R_1 I \quad \text{d'où} \quad E \left( 1 - \frac{RCp}{1 + RCp} \right) = \frac{E - S}{2}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{S}{E} = 1 - \frac{2RCp}{1 + RCp} \quad \text{cad} \quad \boxed{H(p) = \frac{S}{E} = \frac{1 - RCp}{1 + RCp}}$$

Ces cellules sont utilisées pour déphaser le signal d'entrée. Le déphasage dépend des valeurs de R et C.

e. Sommateur

...

### C. Filtres à intégrateur

On synthétise dans ce cas directement l'équation différentielle correspondante à la cellule du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>nd</sup> ordre.

Prenons par exemple une cellule passe haut du second ordre : 
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K p^2}{\omega_N^2 + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1}$$

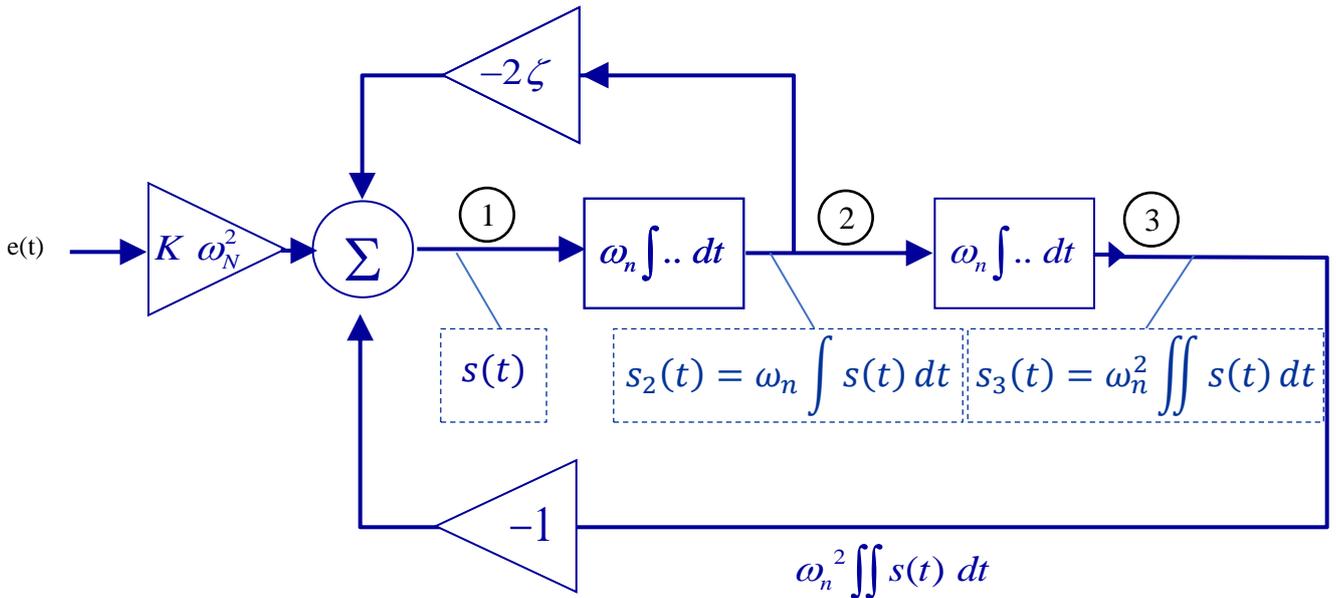
on peut l'écrire 
$$S(p) \left( \frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1 \right) = E(p) K p^2$$

cad en divisant par  $\frac{p^2}{\omega_N^2}$  on a 
$$S(p) \left( 1 + 2\zeta \frac{\omega_N}{p} + \frac{\omega_N^2}{p^2} \right) = E(p) K \omega_N^2$$

cad 
$$S(p) = K \omega_N^2 E(p) - 2\zeta \omega_N \frac{S(p)}{p} - \omega_N^2 \frac{S(p)}{p^2}$$

ce qui, en repassant dans le domaine temporel donne : 
$$s(t) = K \omega_N^2 e(t) - 2\zeta \omega_N \int s(t) dt - \omega_N^2 \iint s(t) dt$$

Cette dernière équation différentielle peut être synthétisée par le montage suivant :



La sortie 1 donne alors bien la fonction désirée.

On peut remarquer qu'à la sortie 2, le signal correspond à un filtre passe bande puisque  $s_2(t) = \omega_n \int s(t) dt$

on a 
$$S_2(p) = \frac{S}{p} = \frac{K p}{\omega_N^2 + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1} E(p)$$
 qui est un filtre passe bande du second ordre.

De la même manière, la sortie 3 donne  $s_3(t) = \omega_n^2 \iint s(t) dt$

on a alors  $S_3(p) = \frac{S}{p^2} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_N^2} + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1} E(p)$  qui est un filtre passe bas du second ordre.

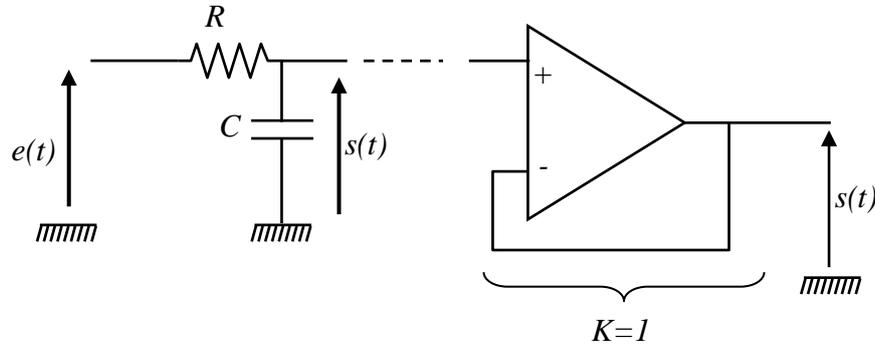
### D. Filtres de Sallen-Key

La méthode de Sallen-key consiste à cascader des cellules de Sallen key d'ordre 2 en y ajoutant si nécessaire une cellule d'ordre 1 pour obtenir un ordre impair.

#### a. Etages du 1<sup>er</sup> ordre

##### α. Passe Bas

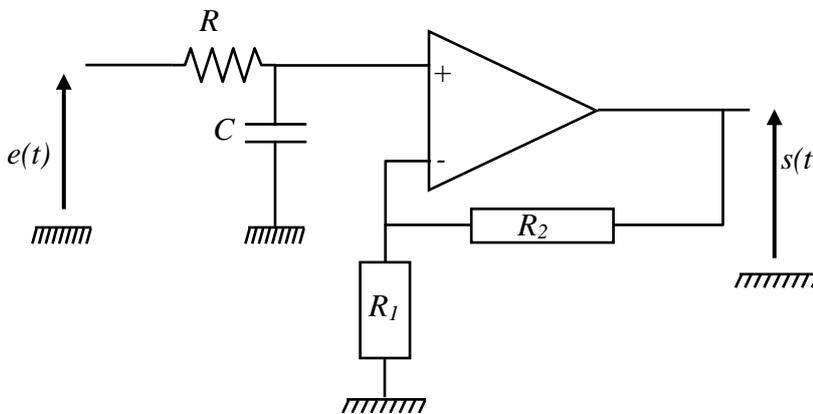
Le classique "RC" est souvent utilisé. On peut lui adjoindre un étage suiveur pour l'isoler de la charge.



La fonction de transfert vaut :  $H(p) = \frac{S}{E} = \frac{1/Cp}{R+1/Cp}$  c'est-à-dire  $H(p) = \frac{1}{1+RCp}$

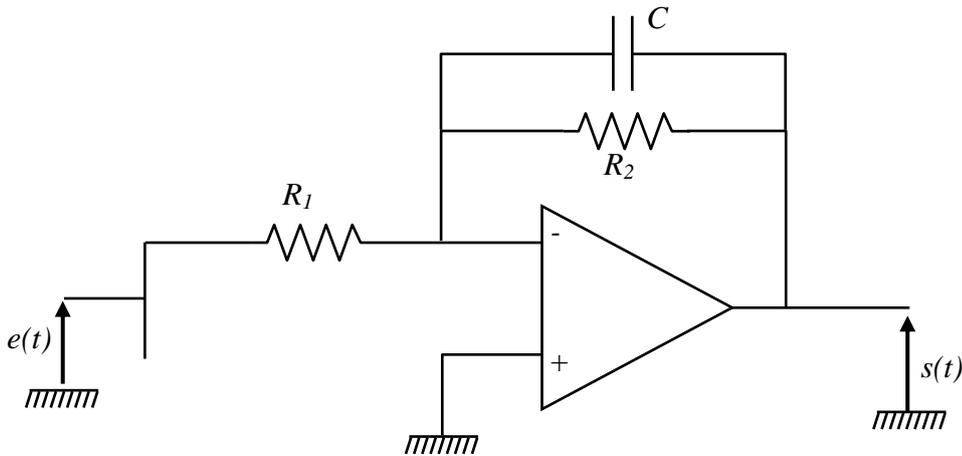
Le suiveur placé en sortie permet d'avoir une impédance de sortie très faible par rapport à la simple cellule RC. Le filtre devient alors indépendant de l'étage suivant.

On peut utiliser un amplificateur plutôt qu'un suiveur :



Sa fonction de transfert vaut :  $H(p) = (1 + \frac{R_2}{R_1}) \frac{1}{1+RCp}$  [ de gain continu ( $\square \rightarrow 0$ )  $K = (1 + \frac{R_2}{R_1})$  ]

Une autre possibilité de filtre passe bas du 1<sup>er</sup> ordre :

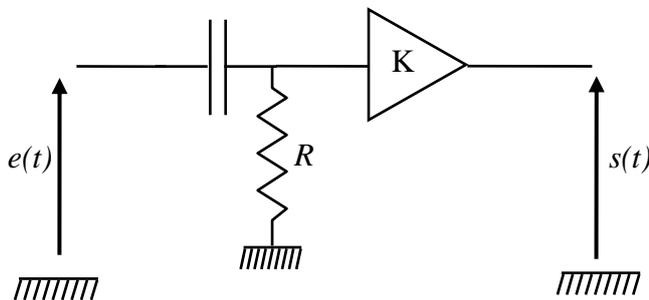


En effet, on a  $S = \frac{-R_2 // C}{R_1} E$  c'est-à-dire  $H(p) = \frac{-R_2 / Cp}{R_1 + 1/Cp}$  ce qui donne :

$$H(p) = - \frac{R_2 / R_1}{1 + R_2 Cp} \quad [ \text{de gain en continu } K = - R_2 / R_1 ]$$

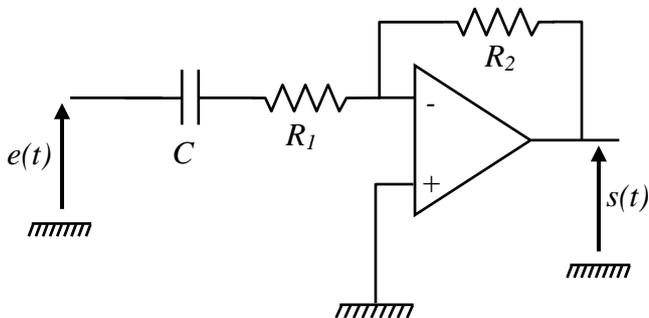
β. Passe Haut

Un filtre passe haut peut être lui aussi réalisé de différentes façons.



de fonction de transfert :  $H = K \frac{RCp}{1 + RCp}$  où K est le gain de l'amplificateur placé en sortie.

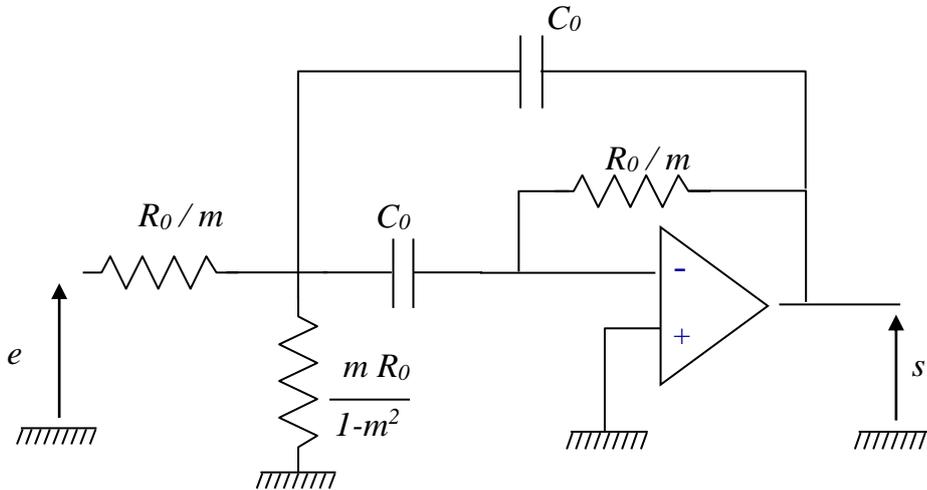
Ou encore comme suit :



de fonction de transfert :  $H(p) = \frac{-R_2}{R_1 + 1/Cp} = \frac{-R_2 Cp}{1 + R_1 Cp}$

$\chi$ . Passe Bande normalisée de Rauch

Une cellule du 1<sup>er</sup> ordre Passe bande de Sallen-key existe ([voir site web](#)) mais est peu utilisée car moins performante que celle de Rauch décrite ci-dessous.



Sa fonction de transfert vaut : 
$$H(p) = \frac{-m R_0 C_0 p_n}{m (R_0 C_0)^2 p_n^2 + 2 m R_0 C_0 p_n + 1}$$

Si on choisit la pulsation de référence  $\omega_0$  telle que : 
$$\omega_0 = \frac{1}{R_0 C_0}$$

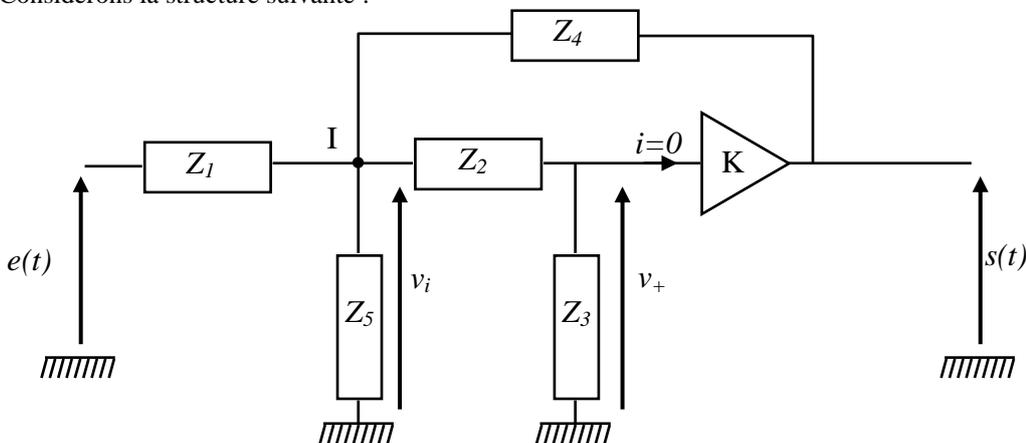
La fonction de transfert exprimée en variable normalisée devient : 
$$H(p_n) = \frac{-m p_n}{p_n^2 + 2 m p_n + 1}$$
 d'amortissement  $\zeta = m$  et

de pulsation naturelle normalisée  $\omega_N = 1$  et de gain max  $G_0 = \frac{1}{4}$ .

b. Cellules du 2<sup>eme</sup> ordre

$\delta$ . Structure générale des cellules de Sallen-Key

Considérons la structure suivante :



On a :  $s = K v_+$  (1)

On écrit que la somme des courants incidents au point I est nul :

$$(V_i - E)Y_1 + (V_i - S)Y_4 + V_i Y_5 + V_i \frac{1}{Z_2 + Z_3} = 0 \quad (2)$$

On note :  $Y_i = 1/Z_i$  et  $Y_t = \frac{1}{Z_2 + Z_3}$

$$\text{On a : } V_+ = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} V_i = \frac{Y_2}{Y_2 + Y_3} V_i$$

$$\text{d'où : } V_i = \frac{Y_2 + Y_3}{Y_2} V_+ = \frac{Y_2 + Y_3}{Y_2} \frac{S}{K} \quad (3)$$

L'équation (2) se met sous la forme suivante :  $V_i(Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_t) - S Y_4 = E Y_1$  (4)

$$\text{On injecte (1) et (3) dans (4) : } S \left( \frac{(Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_t)(Y_2 + Y_3)}{K Y_2} - Y_4 \right) = E Y_1$$

$$\text{d'où finalement } H(p) = \frac{K Y_2 Y_1}{(Y_1 + Y_4 + Y_5 + Y_t)(Y_2 + Y_3) - K Y_2 Y_4}$$

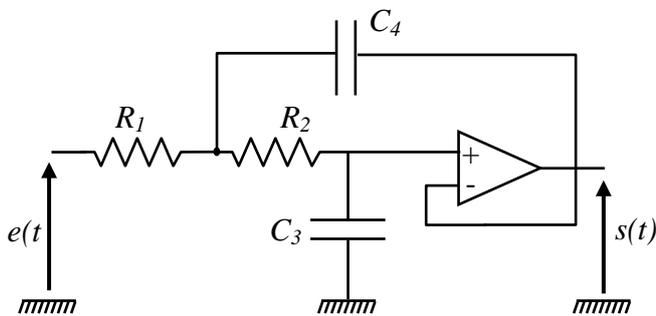
ε. Cellule de base du Passe Bas de Sallen-Key

On remplace dans la cellule précédente :

$$Y_1 = 1/R_1 ; Y_2 = 1/R_2 ; Y_3 = C_3 p ; Y_4 = C_4 p ; Y_5 = 0 ; K = 1$$

On a alors :

$$H(p) = \frac{1}{R_1 R_2 C_3 C_4 p^2 + [C_3(R_1 + R_2) + C_4(1 - K)R_1] p + 1}$$



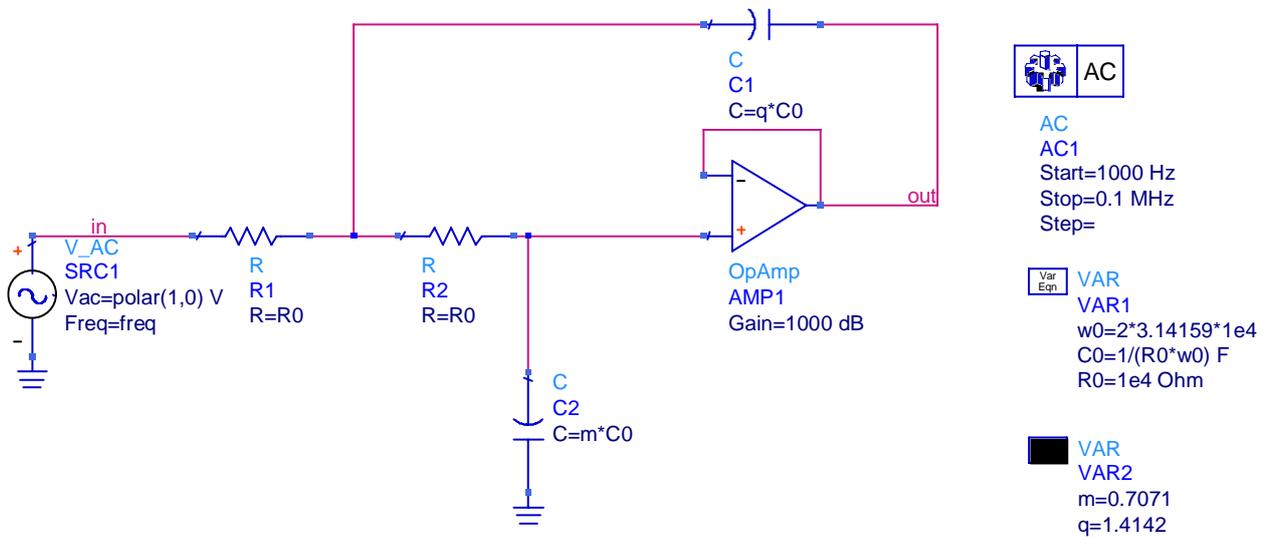
$$\text{Si on pose : } R_1 = R_2 = R_0 ; C_3 = m C_0 \text{ et } C_4 = q C_0 \text{ on a alors : } H(p) = \frac{1}{mq(R_0 C_0)^2 p^2 + 2m C_0 R_0 p + 1}$$

La pulsation naturelle est égale à  $\omega_N = \frac{1}{R_0 C_0 \sqrt{mq}}$  et le coefficient d'amortissement  $\zeta = \sqrt{\frac{m}{q}}$  ce qui correspond à un

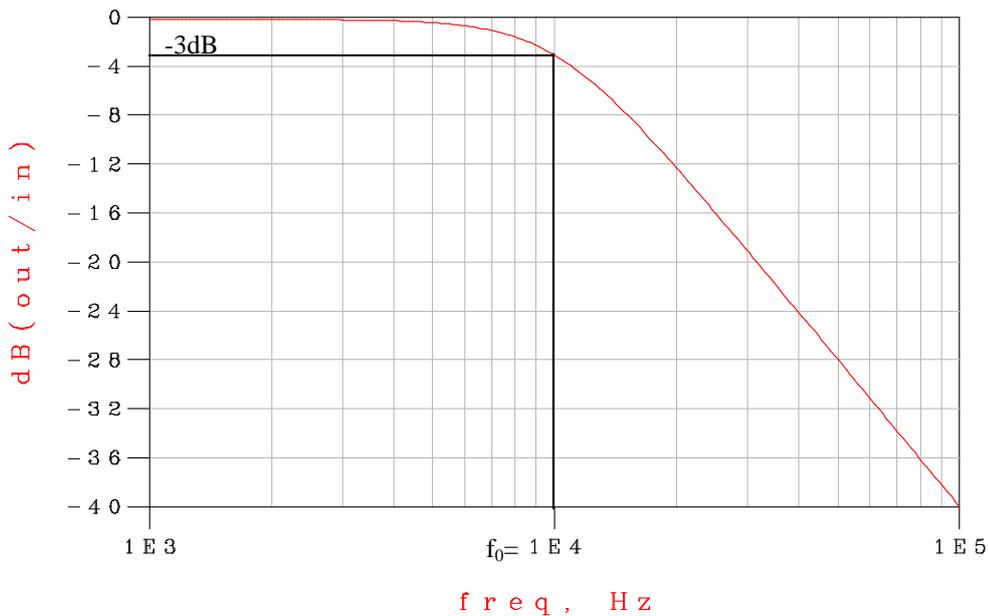
coefficient de qualité  $Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{m}}$

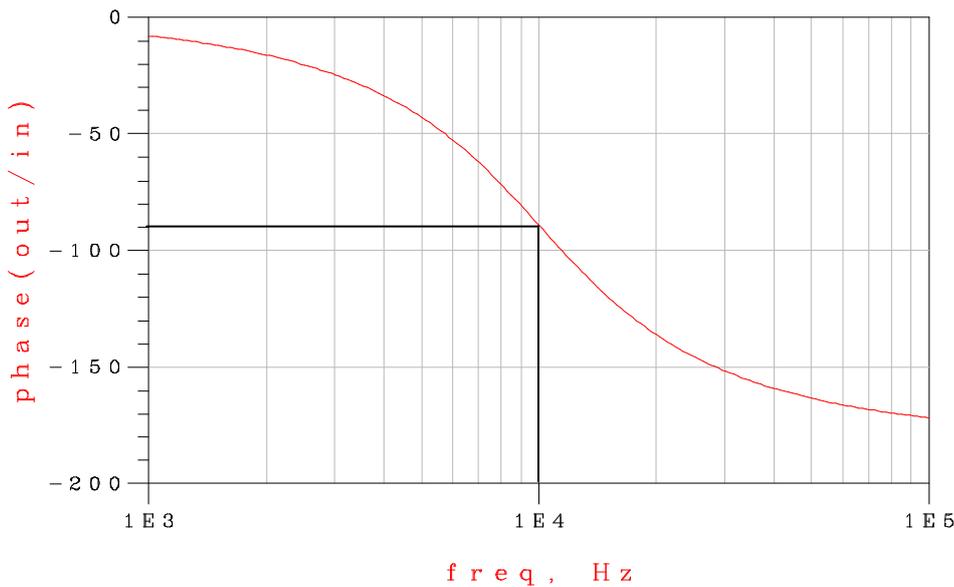
on a alors  $H(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_N}\right)^2 + 2\zeta \frac{p}{\omega_N} + 1}$

La figure suivante montre le schéma de simulation d'un filtre Passe Bas de Sallen Key de Butterworth.



Sa réponse fréquentielle est figurée ci-dessous.





Son gain passe par -3dB à la fréquence  $f_0=10^4$  Hz et sa phase à  $-90^\circ$

φ. Cellule normalisée Passe Bas de Sallen-Key

Dans le but de normaliser le filtre ainsi construit, il faut choisir une impédance et une pulsation de normalisation. Prenons par exemple  $R_0$  comme impédance de normalisation et  $\omega_0 = 1/R_0 C_0$  comme pulsation de normalisation. Les valeurs normalisées des résistances et de  $C_0$  valent alors :

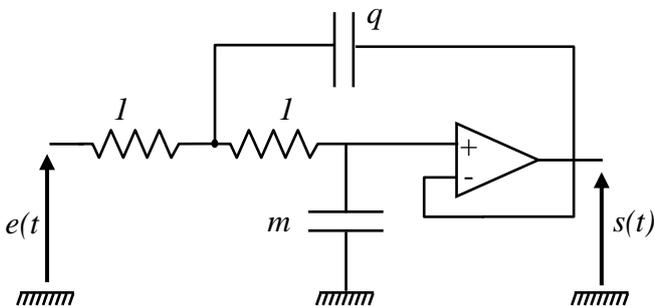
$$r_1 = r_2 = \frac{R_0}{R_0} = 1 \quad \text{et} \quad c_0 = C_0 \omega_0 R_0 = 1$$

d'où la valeur normalisée de  $C_3 = m C_0$  et de  $C_4 = q C_0$  :  $c_3 = m$  et  $c_4 = q$

La fonction de transfert en variable normalisée devient :  $H(p) = \frac{1}{mq p_n^2 + 2m p_n + 1}$  avec  $p_n = \frac{p}{\omega_0}$ , expression que

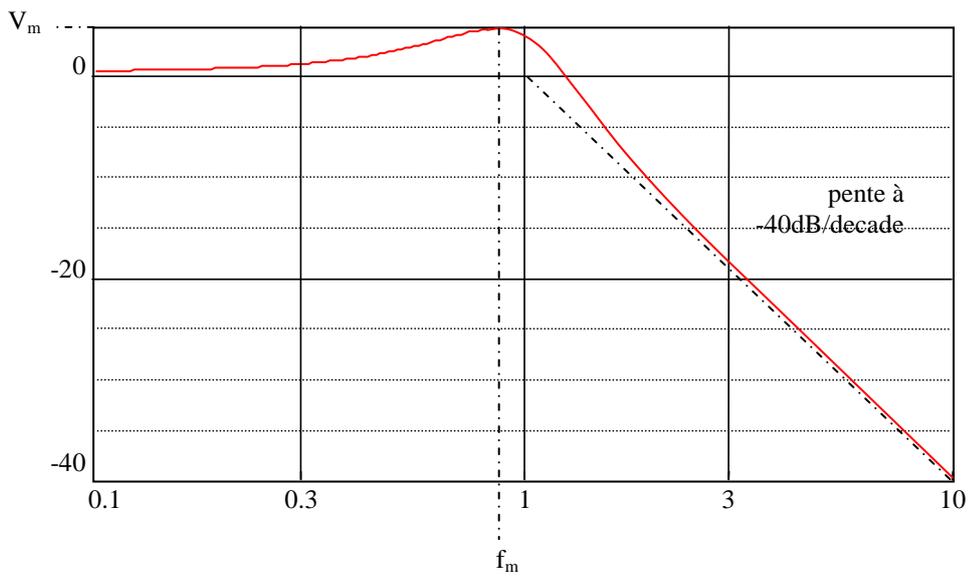
l'on retrouve dans les tableaux de Sallen-Key fourni en TD.

Le schéma électrique de la cellule de Sallen-Key normalisé est donc :



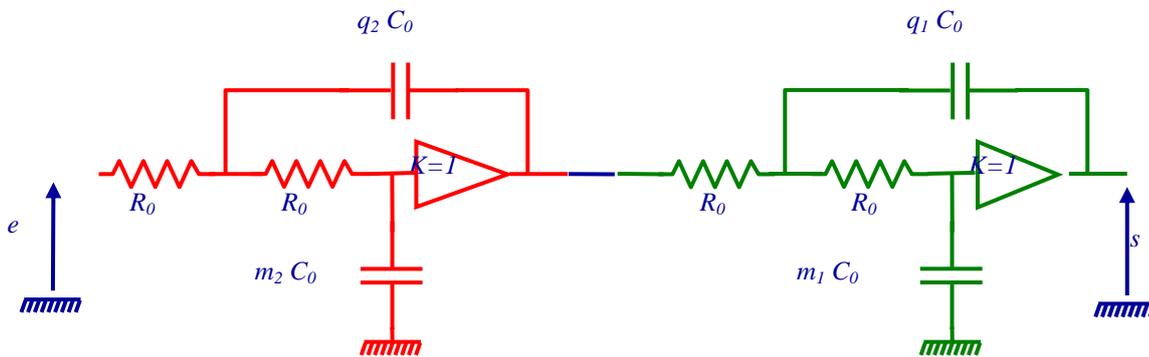
On voit d'après la fonction de Transfert  $H(p) = \frac{1}{mq p_n^2 + 2m p_n + 1}$ , que la pulsation normalisée  $\omega_n = 1/\sqrt{mq}$  et

l'amortissement  $\zeta = \sqrt{m/q}$  dépendent uniquement des valeurs de m et de q. La résonance est donc plus ou moins marquée voire inexistante si la réponse du filtre le nécessite.



Passé Bas de Salen-Key : exemple Passé Bas de Butterworth d'ordre 4

$$H = \frac{1}{p_n^2 + 0.7653 p_n + 1} \cdot \frac{1}{p_n^2 + 1.8477 p_n + 1}$$

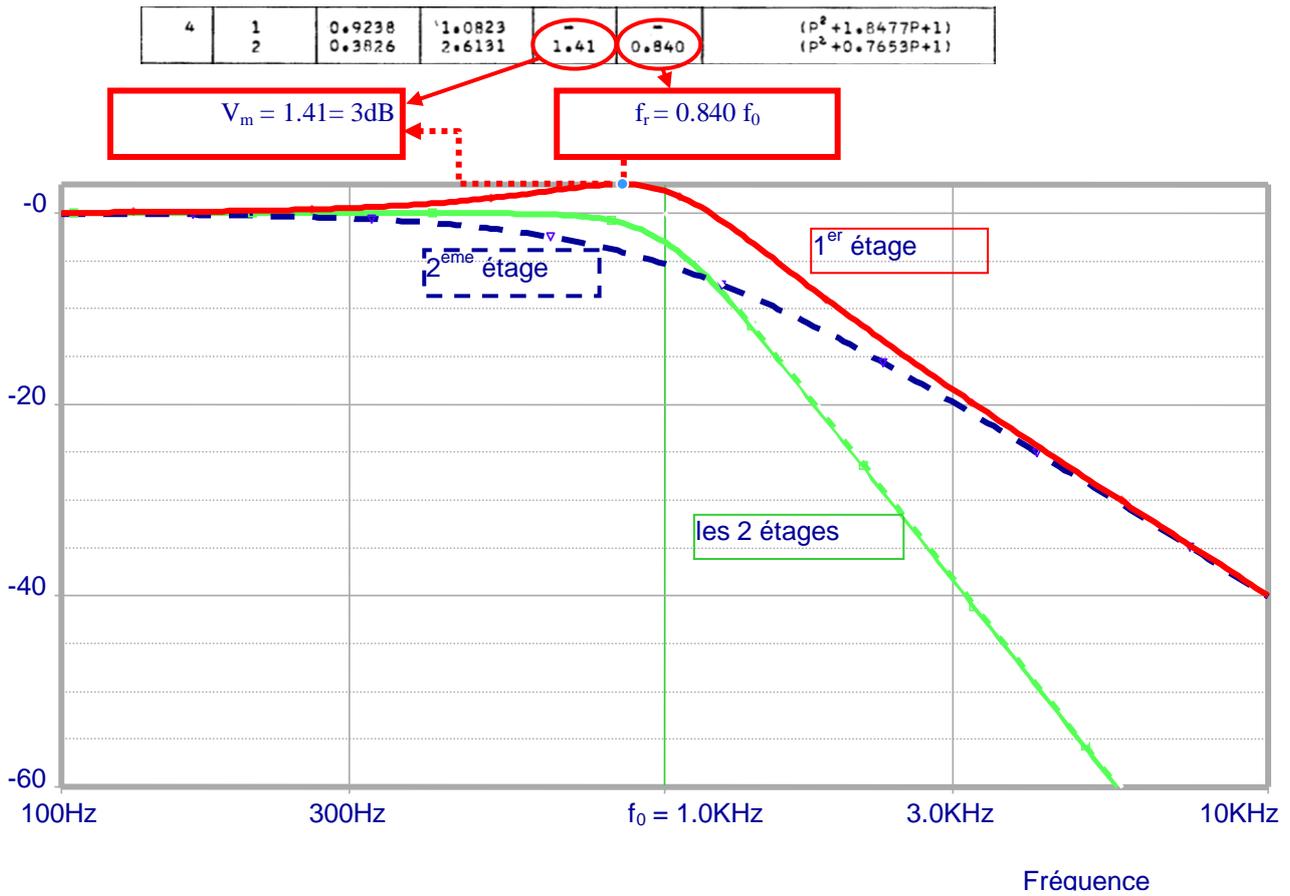


$$m2=0.3826 ; q2 = 2.6131$$

$$m1=0.9238 ; q1 = 1.0823$$

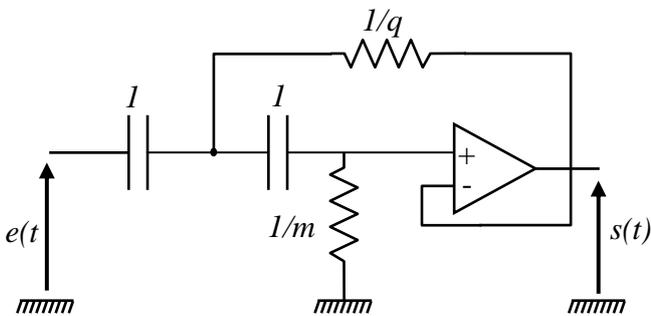
$$G(\omega_r = 0.840 \omega_0) = V_m = 1.41$$

Les Q élevé en tête



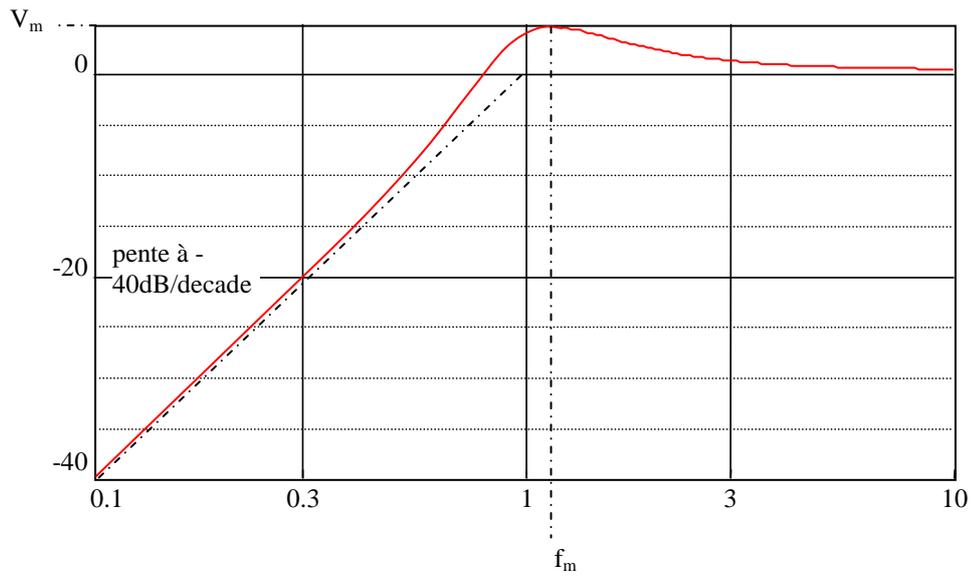
γ. Cellule normalisée Passe Haut de Sallen Key

De la même manière on définit la cellule de base du 2<sup>ème</sup> ordre d'un filtre Passe Haut de Sallen Key :



De fonction de Transfert : 
$$H(p) = \frac{p_n^2 / (mq)}{\frac{p_n^2}{mq} + 2 \frac{p_n}{q} + 1}$$
 de pulsation naturelle  $\omega_n = \sqrt{mq}$  et d'amortissement  $\zeta = \sqrt{m/q}$

La réponse fréquentielle est la suivante :

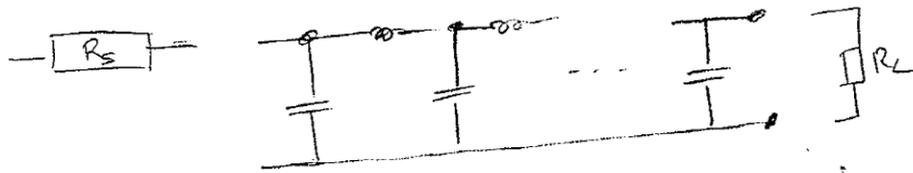


à suivre.....

(voir transparents de cours)

## 7. Synthèse avancée des filtres actifs

On part dans ce cas de structures de filtres passifs LC en échelle du type :

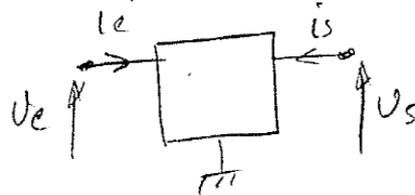


et on simule les inductances par des circuits convertisseurs d'impédance qui

sont des quadripôles définis par les équations :

$$V_e = k V_s$$

$$i_s = -k' i_e$$



$$\text{donc } \frac{V_e}{i_e} = \frac{k V_s}{i_s / -k'} = -k k' \frac{V_s}{i_s}$$

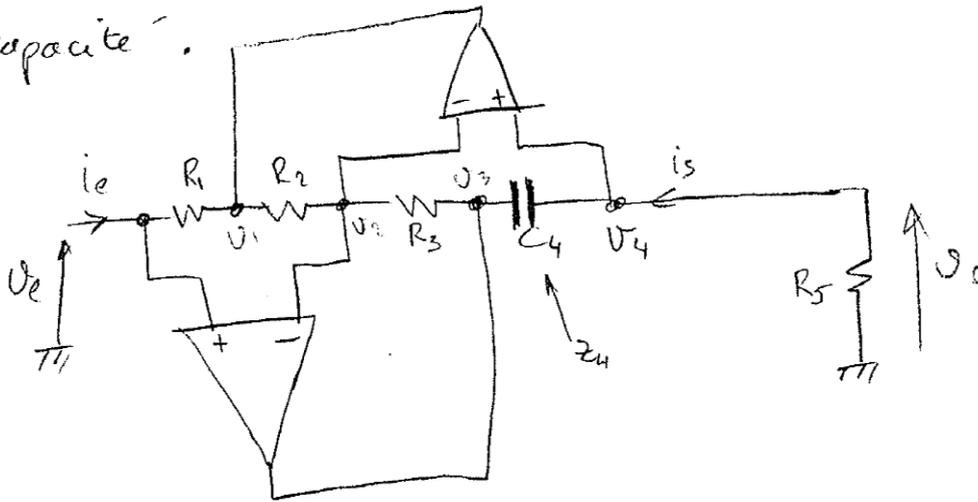
$$\text{donc } Z_e = k Z_s$$

LIK-6

Si  $K$  est négatif on parle de NIC  
(Negative Impédance Converter).

Si  $K$  est complexe on parle alors de GIC  
(Generalised Impedance Converter).

i) On peut par exemple utiliser un GIC pour simuler une inductance en utilisant une capacité.



$$\text{et on a alors } Z_e = \frac{V_e}{i_e} = \frac{R_1 R_3}{R_2 Z_4} R_5 = K R_5$$

$$\text{si on prend } R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = R$$

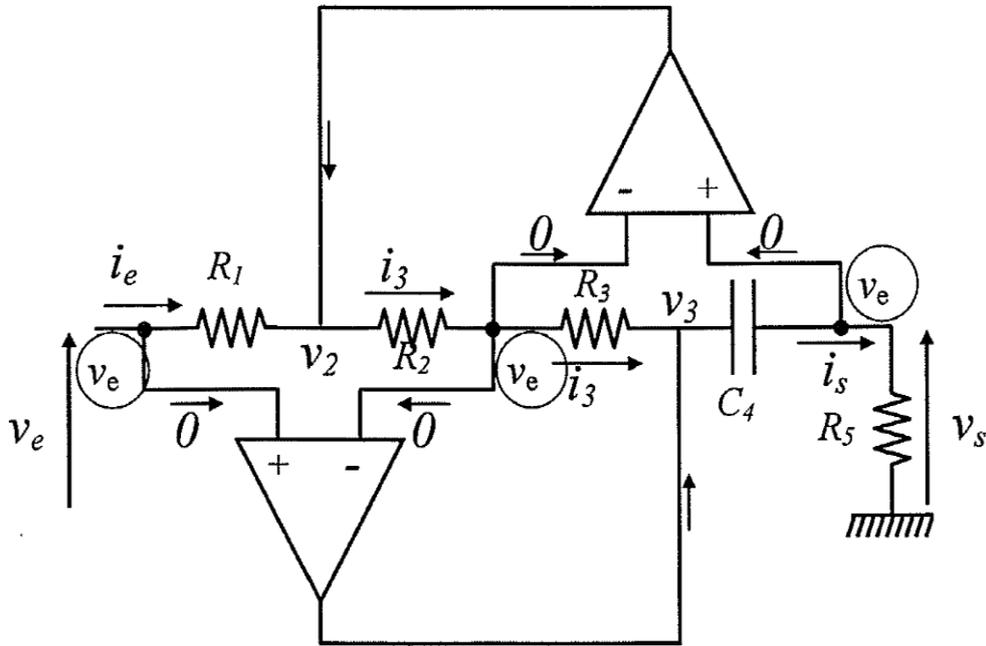
$$\text{et } Z_4 = Z_c = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\text{on a } Z_e = KR \text{ où } K = \frac{R}{Z_c}$$

$$\text{c'est } Z_e = \frac{R^2}{Z_c} = jR^2\omega C \Rightarrow \underline{L = R^2 C}$$

il s'agit ici d'une inductance  $L$  à la masse.

Calcul détaillé du GIC:



Amplificateurs opérationnels considérés comme parfait  $\rightarrow V_+ = V_-$  donc  $v_3 = v_e = R_5 i_s$

or  $i_s = \frac{v_3 - v_e}{Z_{C_4}}$

d'où  $v_e = R_5 \frac{v_3 - v_e}{Z_{C_4}} = R_5 (v_3 - v_e) C_4 p$  cad  $v_3 = v_e \left( \frac{1}{R_5 C_4 p} + 1 \right)$

On a  $i_3 = \frac{v_e - v_3}{R_3} = v_e \frac{1 - \left( \frac{1}{R_5 C_4 p} + 1 \right)}{R_3} = \frac{-v_e}{R_3 R_5 C_4 p}$  et  $i_3 = \frac{v_2 - v_e}{R_2}$

donc  $\frac{v_2 - v_e}{R_2} = \frac{-v_e}{R_3 R_5 C_4 p}$  d'où  $(v_2 - v_e) R_3 R_5 C_4 p = -v_e R_2$  cad  $v_2 = v_e \left( 1 - \frac{R_2}{R_3 R_5 C_4 p} \right)$

or on a  $i_e = \frac{v_e - v_2}{R_1}$  donc  $i_e = v_e \frac{R_2}{R_1 R_3 R_5 C_4 p}$

or  $Z_e = \frac{v_e}{i_e}$

donc  $Z_e = \frac{R_1 R_3 R_5 C_4 p}{R_2}$

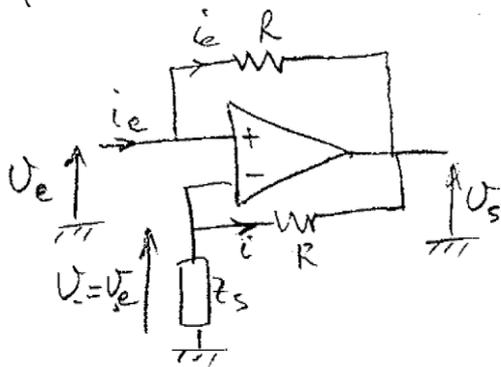
exemple de simulation d'un filtre LC



où le GIC possède un  $\mu = \frac{R}{Z_{C2}}$   
 et  $L_2 = R^2 C_2$ .

ii) Nic

le Nic est un circuit qui réalise la fonction :  $Z_e = -Z_s$  où  $Z_s$  est une impédance choisie.



ma  $V_e - V_s = R i_e$

et  $V_- - V_s = R i$

or  $V_- = V_e$

d'où  $V_e - V_s = R i$ , donc  $i = i_e$

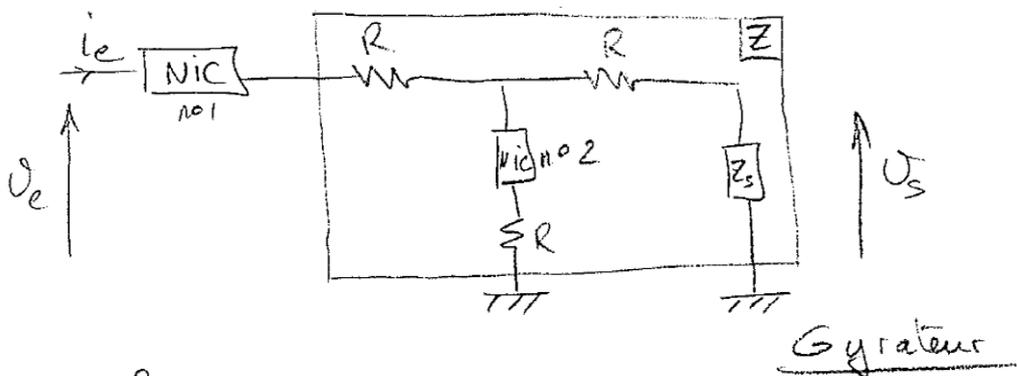
et  $V_e = -Z_s i$  donc  $V_e = -Z_s i_e$

d'où  $Z_e = -Z_s$

Le NIC seul ne permet pas de réaliser l'inversion d'impédance pour transformer une capacité en une inductance.

Cependant, en combinant 2 NIC on peut alors réaliser un gyrateur qui autorise cette opération.

le circuit suivant est un gyrateur :



$$\text{on a } \frac{V_e}{i_e} = Z_e = -Z$$

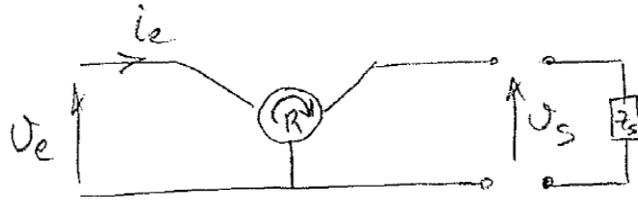
↑  
NIC no 1

$$\text{or } Z = R + \left[ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NIC no 2}}}{-R} \parallel (R + Z_s) \right] = R + \frac{-R(R + Z_s)}{-R + R + Z_s}$$

$$\text{cad } Z = R + \frac{-R(R + Z_s)}{Z_s} = \frac{-R^2}{Z_s}$$

donc  $Z_e = \frac{R^2}{Z_s}$  l'impédance d'entrée est l'inverse de l'impédance  $Z_s$ .

Un gyrateur est symbolisé par :



avec  

$$Z_e = \frac{R^2}{Z_s}$$

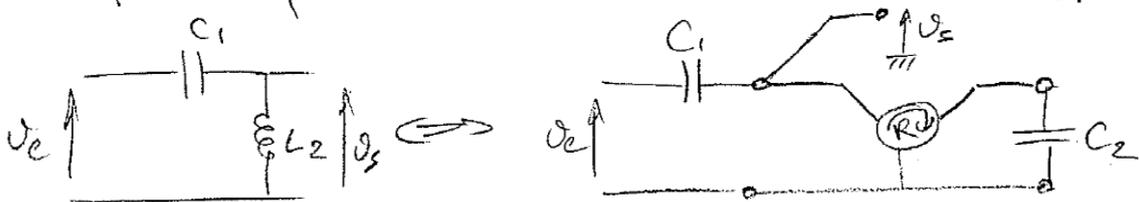
On voit donc que si on place un condensateur en sortie (à la place de  $Z_s$ ) alors on voit en entrée une impédance :

$$Z_e = \frac{R^2}{Z_c} = R^2 C p$$

ce qui peut s'écrire :  $Z_e = L p$

l'impédance d'entrée est donc équivalente à une inductance  $L = R^2 C$ .

ex d'utilisation : Si on désire synthétiser un filtre passe bas du 2<sup>ème</sup> ordre du type :



## VI. Autres systèmes de Traitement des signaux

### 1. Mélangeurs – Transposition de fréquence

#### A. Mélangeur parfait ou multiplieur

*a. Transposition de fréquence*

*b. Up et down converter*

#### B. Mélangeurs réels

### 2. Oscillateurs – PLL - Synthétiseurs

## VII. Modulations

1. Introduction
2. Modulation d'amplitude
3. Modulation de Fréquence
4. Modulation de Phase
5. Modulation IQ

## VIII. Architecture d'un émetteur – récepteur

1. Emetteur
2. Récepteur homodyne
3. Récepteur hétérodyne

## IX. Détecteur synchrone